Polygones réguliers

Énoncé

Soit E un ensemble de $n \geqslant 3$ points du plan. On suppose que si $A \neq B \in E$, la médiatrice de $[AB]$ est un axe de symétrie de E. Montrer que E est un polygone régulier.

Corrigé

Soit G le centre de gravité de E. Si Δ est un axe de symétrie de E, la réflexion par rapport à Δ permute les différents points de E. En particulier, elle laisse invariante le centre de gravité [1] G, c'est-à-dire que $G \in \Delta$. C'est un résultat général : **le centre de gravité d'une figure [2] appartient à tous ses axes de symétrie.** [3]

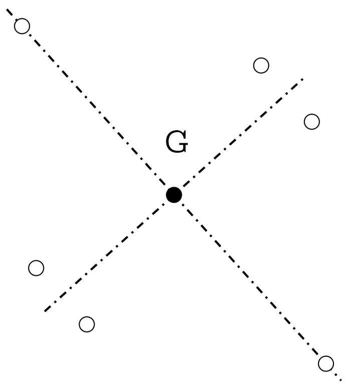


FIGURE 1 – Le centre de gravité d'une figure est sur tous ses axes de symétrie

Ici, les médiatrices de tous les segments $[AB]$ sont des axes de symétrie, donc G appartient à toutes ces médiatrices. En particulier, si A_0 est un point de E, on a, pour tout $A \neq A_0 \in E$, que G est sur la médiatrice de $[AA_0]$ et donc que $AG = A_0G$. En particulier, **tous les points de E sont sur un même cercle centré en G.**

Nommons maintenant les points de E sous la forme $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dans l'ordre dans lequel ils sont rangés sur le cercle.

1. C'est à peu près évident en coordonnées : les coordonnées de G sont les moyennes des coordonnées des points de E. Puisque la réflexion permute les points de E, elle permutera les coordonnées, mais cela ne changera pas leur moyenne : la moyenne d'une liste de nombres ne dépend pas de l'ordre, donc l'isobarycentre d'une liste de points non plus !
2. s'il existe, mais c'est automatique pour une figure finie
3. s'il y en a...

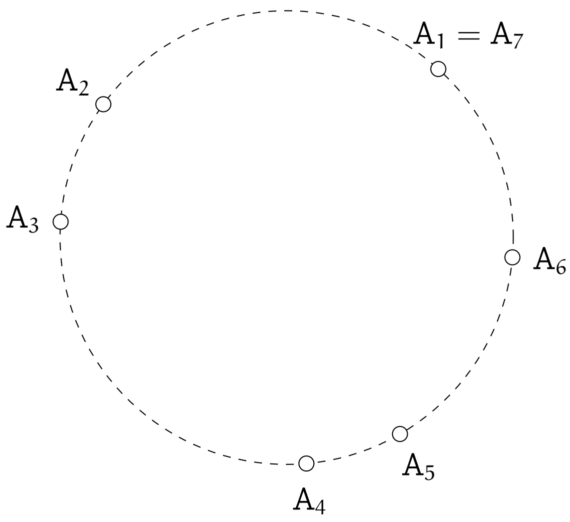


Figure 2 – Tous les points de E sont cocycliques

Si $1 \leqslant i \leqslant n$, la réflexion σ par rapport à la médiatrice de $[A_i A_{i+2}]$ (on considère les indices modulo n : $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$...) échange A_i et A_{i+2}, mais elle n'échange pas les deux arcs de cercle joignant A_i à A_{i+2} (celui qui contient A_{i+1} et celui qui contient les autres A_j). En particulier, cette réflexion fixe forcément A_{i+1}. On en déduit que $A_i A_{i+1} = A_{i+1} A_{i+2}$.

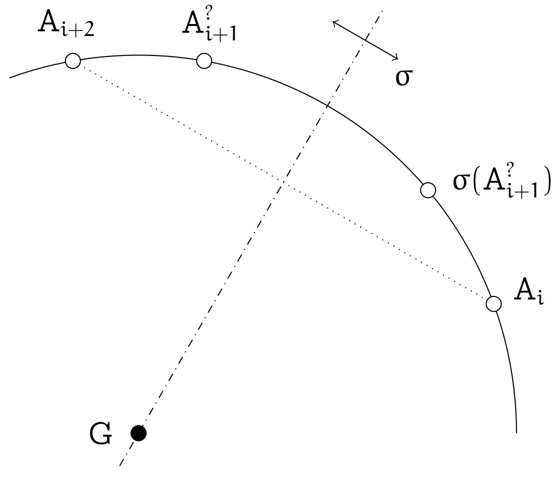


Figure 3 – Une situation impossible

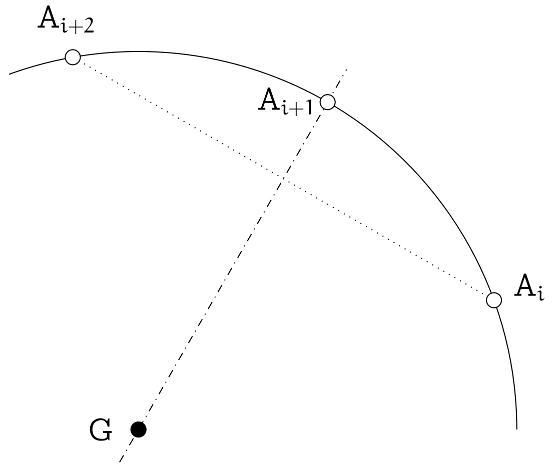


FIGURE 4 – $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}$

Comme cela est valable pour tout i, le polygone $A_1A_2 \cdots A_n$ est bien régulier.

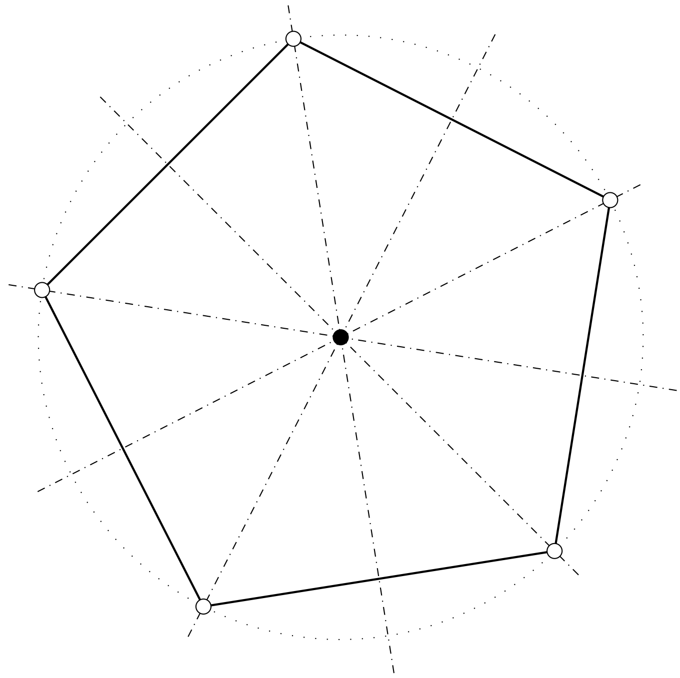


FIGURE 5 – E est un polygone régulier

Puissances de 2

Question

Les six derniers chiffres d'une puissance de 2 sont tous des 6 et des 9. Pouvez-vous les déterminer exactement ?

Réponse

La clef de la question provient des **critères de divisibilité**. Le plus facile de tous ces critères est celui de divisibilité par 2 : on sait tous que les nombres pairs sont ceux sont le dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8. Rappelons la preuve de ce critère :

Tout nombre s'écrit $n = 10a + b$, où b est son dernier chiffre. Comme $10n$ est nécessairement pair, n est pair si et seulement si b l'est.

On voit donc que le cœur de la preuve du critère de divisibilité est le fait que 10 soit pair. Cela permet de généraliser le critère pour reconnaître les multiples de 4, de 8 ou de toute puissance de 2. En effet, 10 n'est pas un multiple de 4, mais $100 = 4 \times 25$ l'est. Comme tout entier s'écrit $n = 100a + b$, où b est obtenu en ne gardant que les deux derniers chiffres, on obtient que n est un multiple de 4 si et seulement si b l'est.

De manière générale, si e est un entier, $10^e = 2^e \times 5^e$ est un multiple de 2^e donc $n = 10^e a + b$ est un multiple de 2^e si et seulement si b l'est. Autrement dit, **un nombre n est un multiple de 2^e si et seulement si le nombre formé des e derniers chiffres de n l'est.** On retrouve bien ainsi les critères de divisibilité par $2^1 = 2$ et $2^2 = 2$.

Retournons à notre problème. On ne sait pas quelle puissance de 2 a uniquement des 6 et des 9 comme derniers chiffres[1] mais on sait déjà que cette puissance de 2 sera divisible par $2^6 = 64$ (en effet, les puissances de 2 non divisibles par $2^6 = 64$ sont $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$, qui ne vérifient pas la propriété voulue[2]). Or, d'après le critère de divisibilité, le fait d'être divisible par 64 se lit sur les six derniers chiffres.

Parmi les 64 nombres à 6 chiffres s'écrivant uniquement avec des 6 et des 9, il s'agit donc de déterminer lesquels sont divisibles par 64. On peut cependant y aller petit à petit, en évitant de tester un à un les 64 possibilités :

- Le nombre inconnu $n =$ ______ est pair donc son dernier chiffre doit être 6 : $n =$ _____6.
- Les deux derniers chiffres _6 de n doivent maintenant former un multiple de 4. C'est le cas de 96 mais pas de 66 : $n =$ ____96.

1. À vrai dire, on ne sait même pas si une telle puissance de 2 existe. Mais l'énoncé semble l'indiquer, faisons-lui confiance.
2. L'énoncé est un peu ambigu : les six derniers chiffres de 6996, par exemple, sont-ils tous des 6 ou des 9, ou doit-on également compter les deux zéros à gauche des chiffres significatifs ? Heureusement, l'ambiguïté n'est pas gênante pour les puissances de 2 : celles qui ont moins de 6 chiffres $(1, 2, \dots, 65\,536)$ ont toutes un chiffre significatif différent de 6 ou 9.

– De même, 696 est un multiple de 8, alors que 996 ne l'est pas : $n = \_\_\_696$.

– Et ainsi de suite : on obtient successivement[3] les trois chiffres suivants et $n = 669\,696$

On a donc démontré que si les six derniers chiffres d'une puissance de deux sont des 6 ou des 9, celle-ci se termine en fait par la suite de chiffres $\ldots 669\,696$.

On vérifie d'ailleurs à l'aide d'un ordinateur que l'énoncé n'a pas menti et qu'une telle puissance de 2 existe. La première est

$2^{4172} =$

78
911 792 778 675 071 736 218 897 937 085 064 649 464 222 959 170 922 615 164 888 237 507
556 543 958 849 339 292 807 682 495 845 182 287 429 198 052 363 589 110 903 845 064 904
085 580 053 692 484 190 118 909 673 609 921 099 879 918 342 015 072 035 057 719 822 578
382 316 027 694 997 043 616 245 155 493 222 865 255 562 860 262 021 996 178 315 817 547
797 472 004 023 905 449 762 725 436 911 029 148 470 518 531 885 934 249 554 817 842 107
559 486 320 019 168 032 304 204 298 019 326 205 106 825 044 942 253 513 034 853 625 166
803 435 738 557 365 508 849 144 582 916 696 397 327 284 910 518 150 724 271 694 418 694
217 792 872 670 195 105 389 653 277 969 829 534 035 348 292 841 809 575 780 316 254 749
935 269 746 553 097 499 800 103 898 991 902 597 846 755 859 740 984 283 847 447 514 625
914 386 785 414 166 262 320 964 537 342 959 372 021 310 870 123 921 058 804 147 371 170
444 366 751 179 419 097 622 961 654 543 616 894 763 505 573 240 997 521 941 835 172 637
647 367 137 626 210 794 899 881 224 337 273 182 782 526 917 623 073 866 504 687 400 248
914 787 905 151 834 412 412 094 035 474 444 714 736 257 487 204 689 378 519 813 620 273
885 766 500 759 389 771 997 967 568 053 856 761 434 735 886 746 935 411 553 451 986 935
328 995 422 668 800 241 738 848 590 317 907 418 088 511 245 474 219 559 105 353 031 398
708 944 644 290 732 474 104 145 678 947 942 411 734 233 509 875 260 218 260 544 115 017
574 140 373 493 166 259 953 793 237 288 591 966 073 266 389 897 562 896 539 203 161 561
621 519 710 927 389 341 155 489 275 362 927 946 043 847 212 526 993 637 338 956 465 769
575 102 438 299 386 007 043 006 918 117 019 807 808 644 822 868 073 587 017 248 669 696

Pour aller plus loin

Les arguments utilisés pour répondre à cette question auraient aussi bien marché si nous avions cherché les dix derniers chiffres d'une puissance de 2, ou n'importe quel autre nombre de chiffres. Par ailleurs, 6 et 9 auraient pu être remplacés par n'importe quels chiffres non nuls[4] pourvu que l'un des deux soit pair et l'autre impair : par exemple, si les 10 derniers chiffres d'une puissance de 2 sont tous des 2 et des 5, c'est qu'elle se termine par $\ldots 2\,255\,255\,552$.

3. De manière générale, une fois que l'on a trouvé les k derniers chiffres (qui forment donc un nombre n_k multiple de 2^k), on obtient le chiffre qu'il faut mettre à gauche : si n_k est déjà multiple de 2^{k+1}, on ajoute un 6 (6 est pair, donc $6 \cdot 10^k$ est également multiple de 2^{k+1} et il en sera alors de même de $6 \cdot 10^k + n_k$) ; sinon, on ajoute un 9 ($9 \cdot 10^k$ est, comme n_k, un nombre multiple de 2^k mais pas de 2^{k+1}, leur somme est donc multiple de 2^{k+1}). On répond ainsi raisonnablement vite à la question, même à la main.

4. Voyez-vous pourquoi ?

On peut alors montrer en utilisant plus d'arithmétique[5] qu'il existe toujours dans ce cas une puissance de 2 se terminant par ces chiffres.

En revanche, si on ne se restreint plus aux derniers chiffres, la question devient très difficile. En expérimentant avec un ordinateur, on se rend compte que les puissances de 2 supérieures à 2^{168} semblent toutes s'écrire en utilisant les dix chiffres[6]. Cette remarque est liée à une conséquence d'une conjecture beaucoup plus forte de Furstenberg (issue de son domaine de prédilection, la *théorie ergodique*).

Conjecture[7] : Soit p et q deux entiers > 1 qui ne sont pas des puissances d'un même entier. Alors toute suite finie de chiffres apparaît dans l'écriture de p^n en base pq, pourvu que n soit assez grand.

5. Spécifiquement, en utilisant le théorème chinois et le fait que 2 est un générateur de $(\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z})^\times$

6. Plus précisément, il ne semble y avoir que 91 nombres n tels que l'écriture de 2^n n'utilise pas tous les chiffres, cf. `http://oeis.org/A130696`.

7. Harry Furstenberg, *Intersections of Cantor Sets and Transversality of Semigroups*, in *Problems in analysis*, pp. 41-59. Princeton Univ. Press, 1970.

Urnes biaisées

Question

On répartit 100 boules (cinquante bleues et cinquante rouges) dans deux urnes. Ensuite, on tire à pile ou face une des urnes, puis au hasard une boule dans cette urne. La probabilité de tirer une boule rouge dépend-elle de la répartition ?

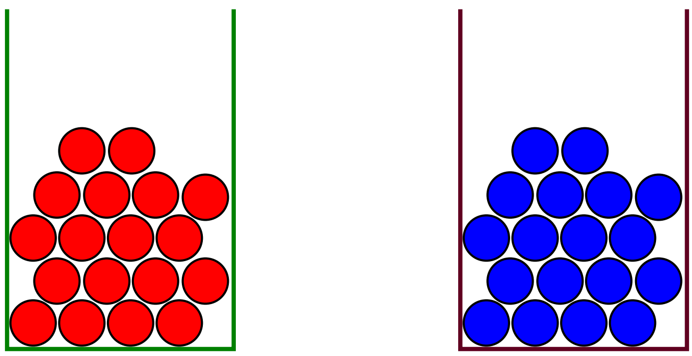
Réponse

La réponse à cette question est : **Oui, la probabilité dépend de la répartition**. On peut avoir l'impression contraire en faisant le calcul dans deux cas apparemment diamétralement opposés :

Si on remplit chaque urne par des boules d'une seule couleur, la probabilité de tirer une boule rouge est simplement la probabilité de tirer l'urne les contenant, c'est-à-dire 1/2. On peut d'ailleurs retrouver cette formule en appliquant la formule des probabilités conditionnelles : si l'on note U_1 (resp. U_1) l'événement « l'urne 1 (resp. 2) est tirée » et R (resp. B) l'événement « une boule bleue est tirée », on a simplement

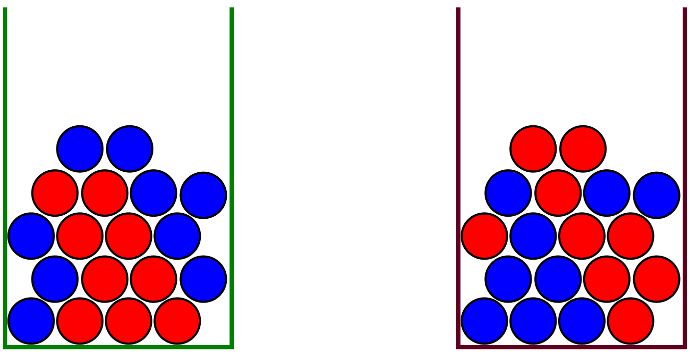
$$P(R) = P(U_1) \cdot P(R|U_1) + P(U_1) \cdot P(R|U_1) = \frac{P(R|U_1) + P(R|U_1)}{2}.$$

Dans le cas où (par exemple) l'urne 1 contient toutes les boules rouges et l'urne 2 toutes les bleues, on a $P(R|U_1) = 1$ et $P(R|U_1) = 0$, ce qui donne bien $P(R) = 1/2$.



$$\begin{aligned} P(R) &= P(U_1)P(R|U_1) + P(U_2)P(R|U_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \qquad\qquad + \frac{1}{2} \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

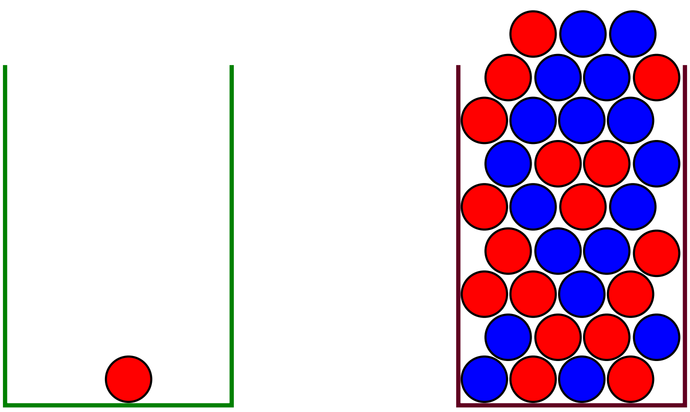
À l'inverse, si chacune des deux urnes contient 25 boules rouges et 25 boules bleues, on a $P(R|U_1) = P(R|U_1) = 1/2$, ce qui entraîne également $P(R) = 1/2$.



$$
\begin{aligned}
P({\color{red}R}) &= P({\color{green}U_1})P({\color{red}R}|{\color{green}U_1}) + P(U_2)P({\color{red}R}|U_2)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \qquad\qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Et ainsi de suite : si chacune des urnes contient 50 boules, on vérifie facilement que la probabilité de tirer une boule rouge est de 50%. En revanche, en jouant avec les paramètres, on se rend compte facilement qu'il est possible d'obtenir une autre probabilité, pourvu que les urnes soient inégalement remplies.

Intuitivement, on se rend compte alors que le cas le plus biaisé (celui où la probabilité de tirer une boule rouge est la plus forte) est celui où l'une des urnes contient seulement une boule rouge alors que l'autre contient toutes les autres boules (50 bleues, 49 rouges). On arrive ainsi à presque trois chances sur 4 de tirer une boule rouge.



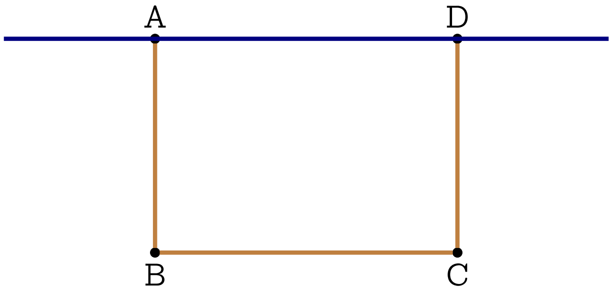
$$
\begin{aligned}
P({\color{red}R}) &= P({\color{green}U_1})P({\color{red}R}|{\color{green}U_1}) \qquad + P(U_2)P({\color{red}R}|U_2)\\
&= \frac{1}{2}\cdot 1 \qquad\qquad\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{49}{99}\\
&= \frac{74}{99} = 0,747474\ldots
\end{aligned}
$$

Il n'est évidemment pas difficile de faire vérifier ce constat par un ordinateur, pour lequel calculer la probabilité dans tous les cas ne prend guère de temps (il n'y en a après tout que 2599). Un défi intéressant serait de le montrer à la main...

Le problème de Didon

Question

Soit Δ une droite du plan et L une longueur fixée. Parmi tous les rectangles $ABCD$ tels que $A, D \in \Delta$ et $AB + BC + CD = L$, lesquels sont d'aire maximale ?



Réponse

Pour répondre à cette question, donnons des noms aux différents paramètres.

Si nous appelons x la longueur $AB = CD$ (qui peut a priori varier entre 0 et $L/2$), la longueur BC vaut $L - 2x$ et l'aire du rectangle est donc $A(x) = x(L - 2x) = -2x^2 + Lx$. Il est alors aisé de déterminer le sens de variation de ce polynôme du second degré : comme le coefficient dominant est négatif, le polynôme est croissant puis décroissant, et son maximum est atteint au milieu de ses deux racines, qui sont visiblement 0 et $L/2$.

x	0		$L/4$		$L/2$
$A(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{L^2}{8}$	$\searrow$	0

Le maximum de $A(x)$ est donc atteint quand $x = L/2$ (et vaut $\frac{L^2}{8}$). Ainsi, les rectangles résolvant le problème de Didon sont ceux qui sont deux fois plus longs que larges.

Remarquons que l'on peut en fait trouver ce résultat à l'aide de l'*inégalité arithmético-géométrique* : dans sa version la plus simple, celle-ci affirme que si α et β sont deux nombres $\geqslant 0$, *leur moyenne géométrique* $MG(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha\beta}$ est toujours inférieure ou égale à *leur moyenne arithmétique* $MA(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Ainsi, on a

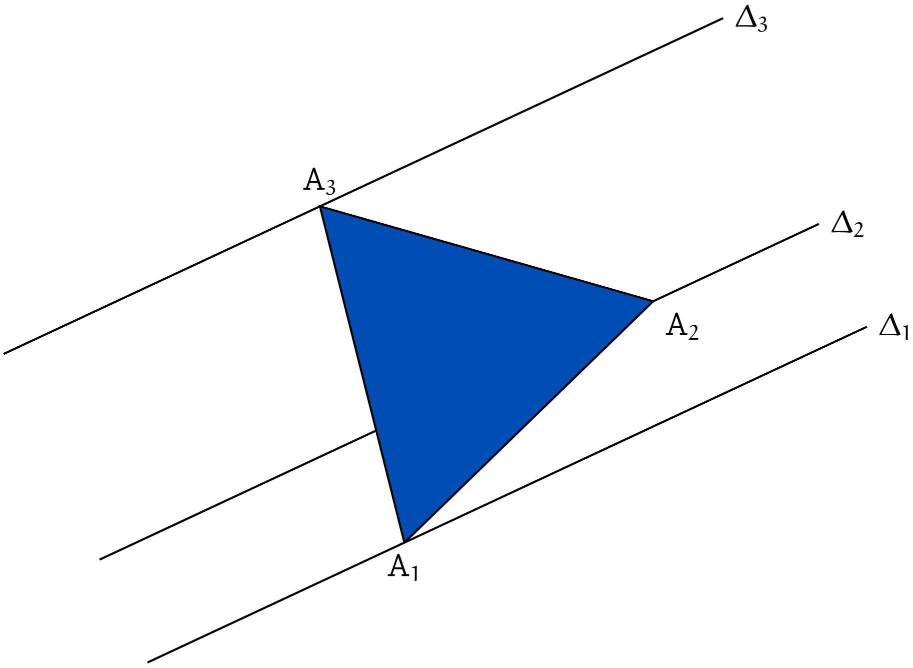
$$\text{Aire}(ABCD) = xy = \frac{1}{2}MG(2x, y)^2 \leqslant \frac{1}{2}MA(2x, y)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2x + y}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}L^2.$$

En outre, l'inégalité arithmético-géométrique est une égalité si et seulement si les deux termes α et β sont égaux, ce qui entraîne encore une fois que la seule solution au problème de Didon est celle des rectangles tels que $y = 2x$.

Construire un triangle équilatéral

Question

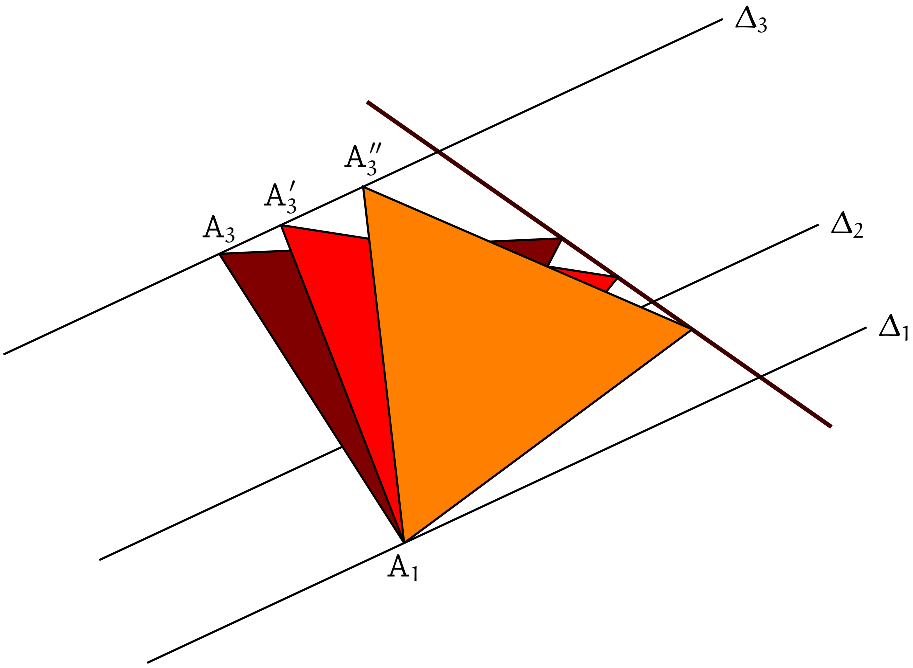
Étant donné trois droites parallèles Δ_1, Δ_2, Δ_3, construire à la règle et au compas un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ tel que $A_1 \in \Delta_1$, $A_2 \in \Delta_2$ et $A_3 \in \Delta_3$.



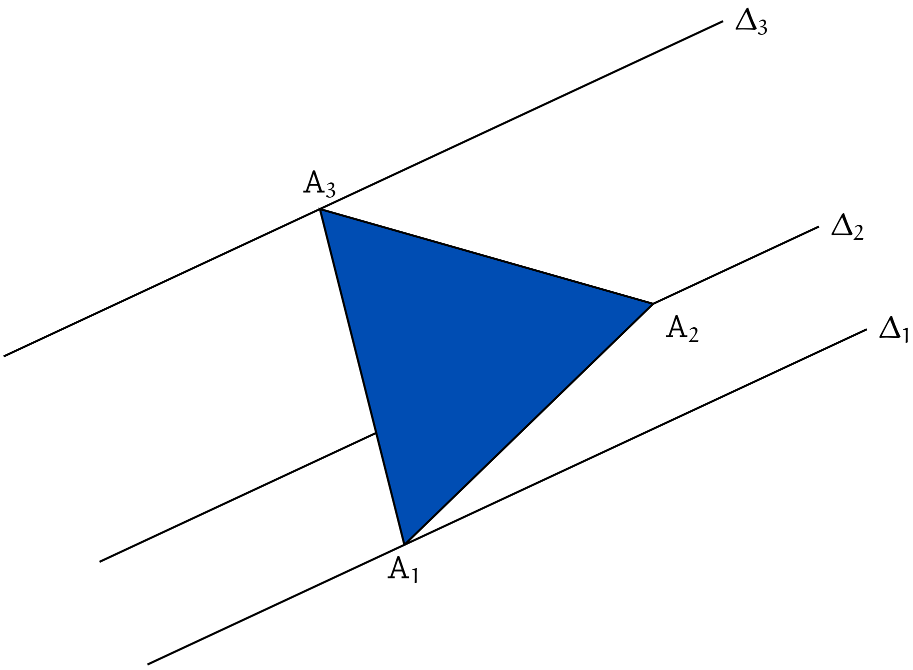
Réponse

Déjà, on se convainc relativement facilement qu'un tel triangle existe. En supposant que la droite Δ_2 est entre les deux autres droites, fixons un point $A_1 \in \Delta_1$ et faisons varier un point A_3 sur Δ_3. On voit alors facilement que l'on peut former un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$, et qu'en faisant varier A_3, A_2 décrit une droite [1] : la solution du problème est à l'intersection de cette droite et de Δ_2.

1. En fait, deux droites : étant donné un segment A_1A_3, il y a deux points A_2 tels que $A_1A_2A_3$ soit équilatéral : un pour lequel A_1, A_2 et A_3 sont ordonnés dans le sens direct et un pour lequel ils sont ordonnés dans le sens indirect. Dans la suite, on se concentre sur une des deux possibilités.



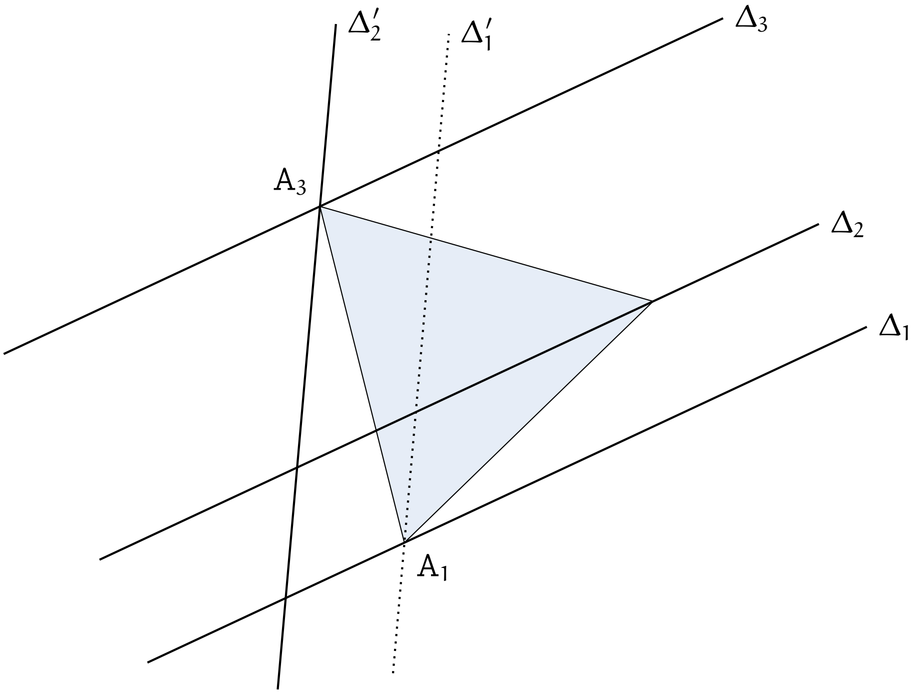
Observons ce qui se passe lorsque le point A_2 est sur Δ_2.



Comme $A_1A_2A_3$ est équilatéral, l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$ est de 60°. Le point A_2 est donc soumis à deux contraintes : il est sur Δ_2 et son image par la rotation de centre A_1 et d'angle 60° est sur Δ_3.

Cela permet la construction du triangle : si les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont données, il s'agit de tracer la droite Δ_2', image de Δ_2 par la rotation [2] de centre A_1 et d'angle 60°. Le point A_3 est alors à l'intersection de Δ_3 et Δ_2'.

2. Parce que nous avons choisi de construire le triangle $A_1A_2A_3$ direct. Si nous avions fait l'autre choix, il s'agirait de la rotation d'angle $-60°$

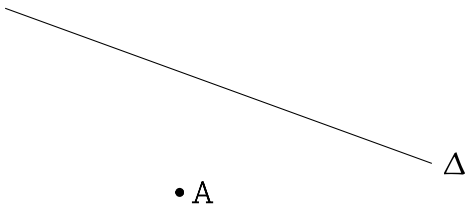


Une solution possible à notre problème est donc la suivante :

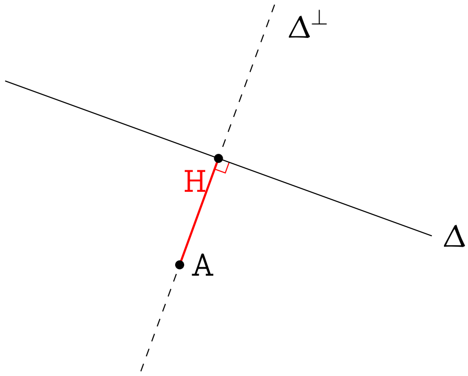
1. Placer un point A_1 sur Δ_1.
2. Construire la droite Δ'_2 image de Δ_2 par la rotation de centre A_1 et d'angle $60°$. On appelle A_3 le point d'intersection de Δ'_2 et Δ_3 (par construction ces droites ne peuvent pas être parallèles puisque l'angle entre elles est de $60°$).
3. Construire le triangle équilatéral (direct) $A_1A_2A_3$.

Pour pouvoir effectuer cette construction à la règle et au compas, il suffit de s'assurer qu'étant donné un point A (jouant le rôle de A_1) et une droite Δ (jouant celui de Δ_2), on peut construire l'image Δ' de la droite Δ par la rotation de centre A et d'angle $60°$. Voilà une possibilité de construction, une fois que l'on sait construire la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.

But : construire Δ', image de Δ par la rotation de centre A et d'angle $60°$.

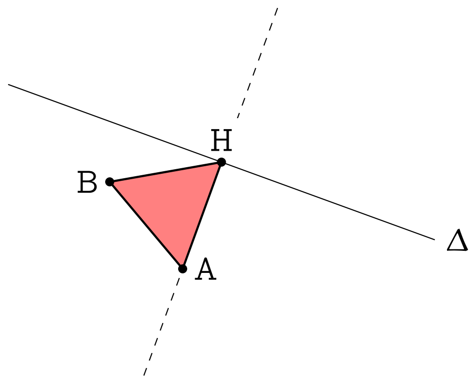


Étape 1 : abaisser la perpendiculaire à Δ passant par A.

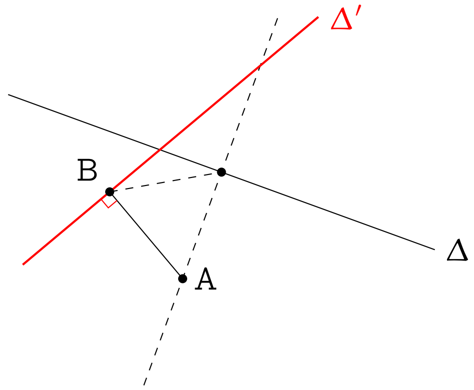


La droite cherchée sera donc perpendiculaire à l'image de [AH] par la rotation de centre A et d'angle 60°.

Étape 2 : construire le triangle équilatéral direct AHB.



Étape 3 : La droite cherchée est maintenant la perpendiculaire à [AB] passant par B.

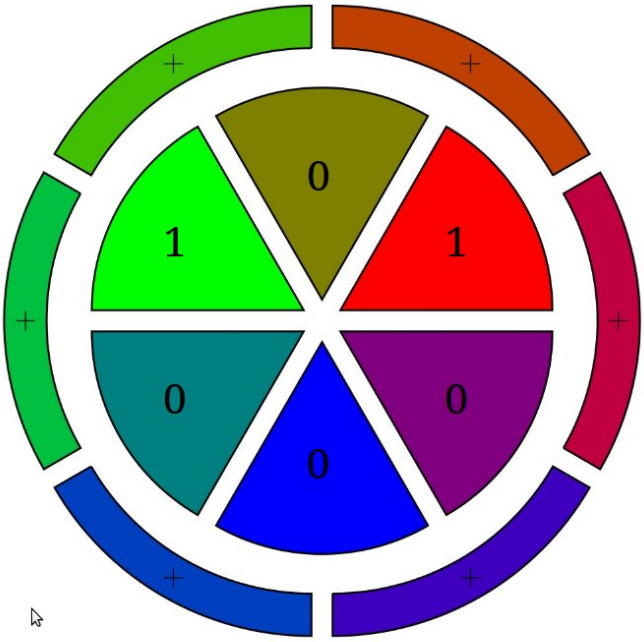


Cela conclut la construction.

Jeu des $+1$

Question

Six nombres entiers sont inscrits dans les secteurs d'un disque. À chaque étape, vous pouvez ajouter 1 aux nombres inscrits dans deux secteurs adjacents. Si l'on part de la situation où les nombres sont 1, 0, 1, 0, 0, 0, pouvez-vous parvenir à une situation où les six nombres sont égaux ?



Réponse

En jouant un peu avec le jeu en ligne, on se convainc relativement facilement qu'il est impossible d'égaliser les nombres en partant de la configuration 1, 0, 1, 0, 0, 0. Comment démontrer une telle impossibilité ?

Une idée fertile est de trouver un **invariant**, c'est-à-dire un objet mathématique que l'on peut déterminer à partir d'une configuration (un nombre que l'on peut calculer, par exemple) et dont on peut démontrer qu'il ne change pas lorsqu'on passe d'une étape à la suivante.

Ici, passer d'une étape à l'autre se fait en ajoutant 1 à deux secteurs consécutifs. On peut donc trouver un invariant en considérant la somme alternée des nombres en présence, c'est-à-dire le résultat de l'opération $n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 - n_6$, où n_i est le nombre qui apparaît dans le i-ème secteur. À chaque étape, on remplace une paire (n_i, n_{i+1}) par la paire $(n_i + 1, n_{i+1} + 1)$ (ou (n_6, n_1) par $(n_6 + 1, n_1 + 1)$). Cela ne change pas la valeur de la somme alternée.

Or, dans la configuration initiale, la somme alternée vaut $1-0+1-0+0-0 = 2$ alors que si tous les nombres sont égaux, la somme alternée vaut 0 : il est donc impossible d'égaliser tous les nombres.

Réciproquement, on voit relativement aisément que si la configuration initiale a une somme alternée nulle, il est possible d'égaliser tous les nombres.

Déplacer des pions

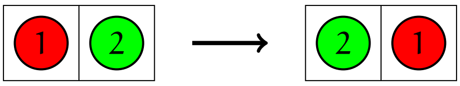
Question

On place des pions sur un damier de taille $n \times m$. À quelle condition sur n et m est-il possible de les réarranger de telle sorte que chaque pion atterrisse sur une case adjacente de celle qu'il occupait précédemment ?

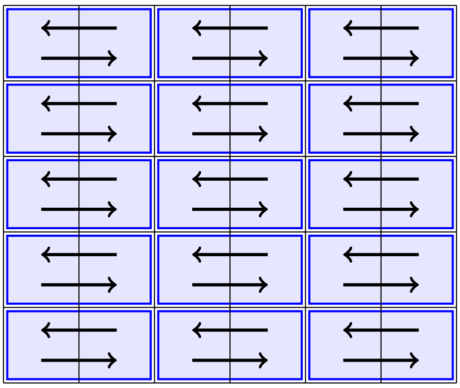
Réponse

La réponse est qu'un tel déplacement est possible si et seulement si le damier a un nombre pair de cases (c'est-à-dire si n ou m est pair).

Pour montrer que cela est alors possible, remarquons qu'échanger les deux pions répond à la question sur le damier de taille 2×1.

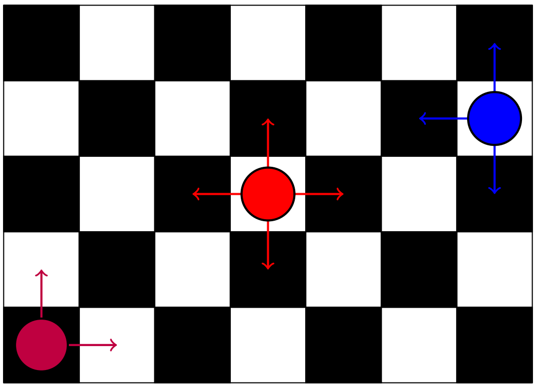


Si le nombre de lignes ou le nombre de colonnes est pair, on peut alors découper le damier en « dominos » 2×1. En appliquant notre technique précédente, c'est-à-dire en échangeant les deux pions de chaque domino, on obtient alors un déplacement répondant aux contraintes. (Remarquons qu'il y a beaucoup d'autres façons de faire...)



Réciproquement, montrons qu'un tel déplacement est impossible pour un nombre impair de cases. Encore une fois, il y a de multiples preuves possibles mais nous n'en exposerons qu'une : tel un vrai damier, supposons que notre damier $n \times m$ soit colorié en noir et blanc, de telle sorte que deux cases de la même couleur ne soient jamais adjacentes.

On voit alors que, tel le mouvement d'un cavalier sur un vrai échiquier, chaque pion devrait changer de couleur de case en se déplaçant : passer d'une case noire à une case blanche, ou réciproquement.



Ainsi, si une permutation envoyant tout pion sur une case adjacente était possible, chaque case blanche serait associée à une case noire, et réciproquement. Mais cela est impossible, puisqu'il n'y a pas autant de cases noires que de cases blanches ! (S'il y en avait autant, le nombre total de cases est pair...)

Nombre d'amis sur un réseau social

Question

Sur le réseau social Friendface, chacun des n membres peut être ami avec n'importe quel autre membre (mais pas avec lui-même). La relation est symétrique : si Moss est ami avec Roy, Roy est ami avec Moss. Montrer que deux des membres de Friendface ont exactement le même nombre d'amis.

Réponse

À première vue, la clef de cette question semble être le *principe des tiroirs* (aussi appelé *principe de Dirichlet*) : si on essaie de mettre p chaussettes dans $q < p$ tiroirs, un des tiroirs contiendra au moins deux chaussettes. De manière plus mathématique, aucune fonction $f : E_p \to E_q$ entre un ensemble de cardinal p et un ensemble de cardinal q ne peut être une injection.

Ici, on a très envie d'appliquer le principe des tiroirs en prenant l'ensemble des membres du réseau social comme ensemble de départ et les nombres d'amis possibles comme ensemble d'arrivée. L'ensemble de départ a donc exactement n éléments ; combien en a l'ensemble d'arrivée ? Chacun des membres peut a priori être ami avec tous les autres (ce qui fait $n-1$ amis), n'être ami avec personne (0 ami) ou n'importe quelle situation intermédiaire. La fonction « nombre d'amis »

$$N : \{\text{membres du réseau social}\} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

est donc une fonction entre ensembles à n éléments et le principe des tiroirs ne s'applique pas.

Puisque les deux ensembles ont n éléments, deux choses peuvent se passer :

- La fonction N envoie deux éléments sur la même image. Autrement dit, deux membres du réseau social ont le même nombre d'amis. C'est ce que l'on veut démontrer.
- La fonction N est une bijection : il existe exactement un membre du réseau social sans ami, exactement un membre n'ayant qu'un ami, ..., exactement un membre ayant $n-2$ amis et exactement un membre ayant $n-1$ amis. Il n'y a plus qu'à montrer que cette hypothèse est impossible. L'argument est simple : si un des membres du réseau a $n-1$ amis, il est ami avec tous les autres. En particulier, aucun des membres du réseau ne peut avoir 0 ami. Cette hypothèse est donc absurde.

Ainsi, deux membres du réseau ont le même nombre d'amis.

Remarquons que ce que l'on vient de démontrer peut en fait se reformuler comme un résultat de théorie des graphes : *dans un graphe (simple) fini, il existe deux sommets de même degré.*

Nombres à trois chiffres

Question

Montrer que parmi dix-huit nombres à trois chiffres consécutifs, il en existe un qui est divisible par la somme de ses chiffres.

Réponse

Dans le cadre de cette réponse, convenons d'appeler **sympathiques** les nombres qui sont divisibles par la somme de leurs chiffres.

La question fait évidemment penser aux critères de divisibilité par 3 et par 9 :

Théorème.

- Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Pour les nombres à trois chiffres, la somme des chiffres est comprise entre 1 et $9+9+9 = 27$. Ainsi, si notre nombre est en outre divisible par 9, la somme de ses chiffres ne peut être que 9, 18 ou 27. Intéressons-nous à ces trois catégories de multiples de 9 :

- Les multiples de 9 dont la somme des chiffres vaut 9 : par le critère de divisibilité, ceux-là sont tous sympathiques.
- Les multiples de 9 dont la somme des chiffres vaut 27 : cette catégorie est en fait restreinte au seul nombre 999. On peut remarquer qu'il est sympathique : $999 = 37 \times 27$, mais cela ne va en fait pas nous importer.
- Les multiples de 9 dont la somme des chiffres vaut 18 : ceux-là peuvent être sympathiques (comme 990) ou pas (comme 909). En fait, il est assez facile de les distinguer : d'après le lemme de Gauß, comme 2 et 9 sont premiers entre eux, un nombre est divisible par 18 si et seulement s'il est pair et divisible par 9. Ainsi, dans notre catégorie, les pairs sont sympathiques et les impairs ne le sont pas.

On a donc trouvé une grande famille de nombres sympathiques : que la somme de leurs chiffres vaille 9 ou 18, tous les multiples de 18 sont sympathiques. Comme il existe toujours un multiple de n dans une liste de n nombres consécutifs, on a donc bien montré que **parmi 18 nombres à trois chiffres consécutifs, il existait toujours un nombre sympathique**.

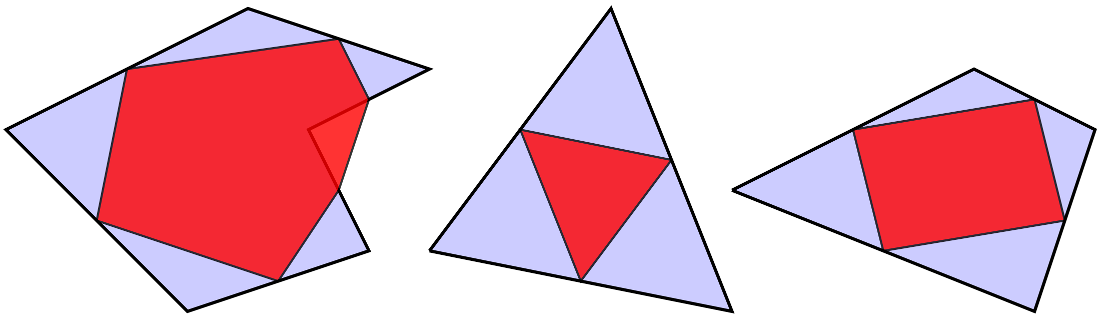
Une vérification exhaustive montre d'ailleurs qu'on ne peut pas remplacer 18 par un nombre plus petit : parmi les 17 nombres compris entre 559 et 575, par exemple, ne se trouve aucun nombre sympathique.

Polygone des milieux

Question

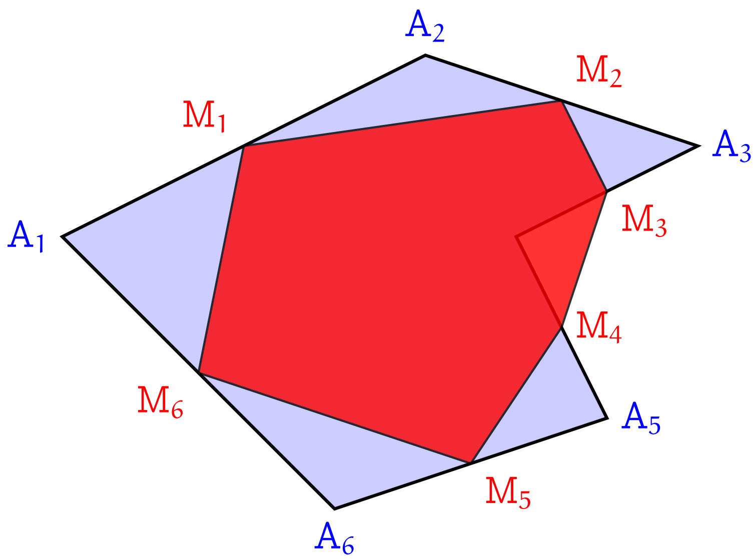
Tout polygone à n côtés P définit un autre polygone P', dont les sommets sont les milieux des côtés du polygone initial et que l'on appellera le **polygone des milieux de** P.

Étant donné un polygone P' à n côtés, comment construire un polygone P dont P' soit le polygone des milieux (ou montrer qu'un tel polygone n'existe pas) ?



Réponse

Observons la situation :



Le polygone des milieux est $M_1M_2 \ldots M_{n-1}M_n$, où M_i est le milieu du segment $[A_iA_{i+1}]$ (ou $[A_nA_1]$ si $i = n$). Ainsi, si on connaît le polygone des milieux et le sommet A_1, on connaît tous les sommets du polygone initial :

- A_2 est le symétrique de A_1 par rapport à M_1 ;
- A_3 le symétrique de A_2 par rapport à M_2 ;
- ... ;

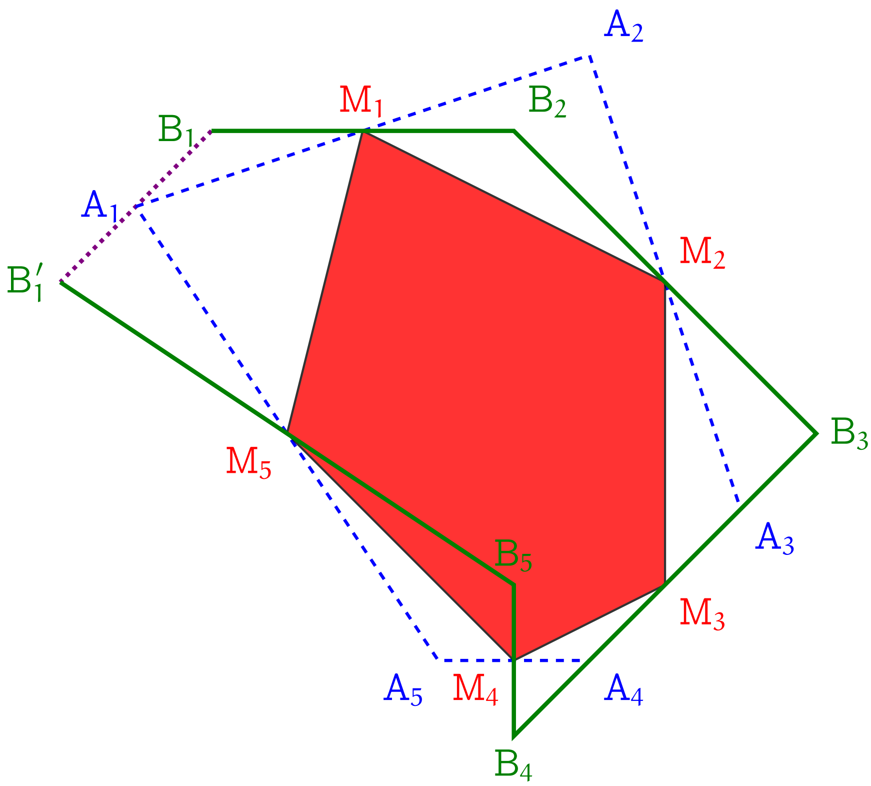
– A_n est le symétrique de A_{n-1} par rapport à M_{n-1},
et la boucle se referme ensuite : A_1 est le symétrique de A_n par rapport à M_n.

Cela nous donne l'idée de la construction : à partir d'un point B_1 du plan, on construit

– le symétrique B_2 de B_1 par rapport à M_1 ;
– le symétrique B_3 de B_2 par rapport à M_2 ;
– ...
– le symétrique B_n de B_{n-1} par rapport à M_{n-1} ;
– le symétrique B_1' de B_n par rapport à M_n.

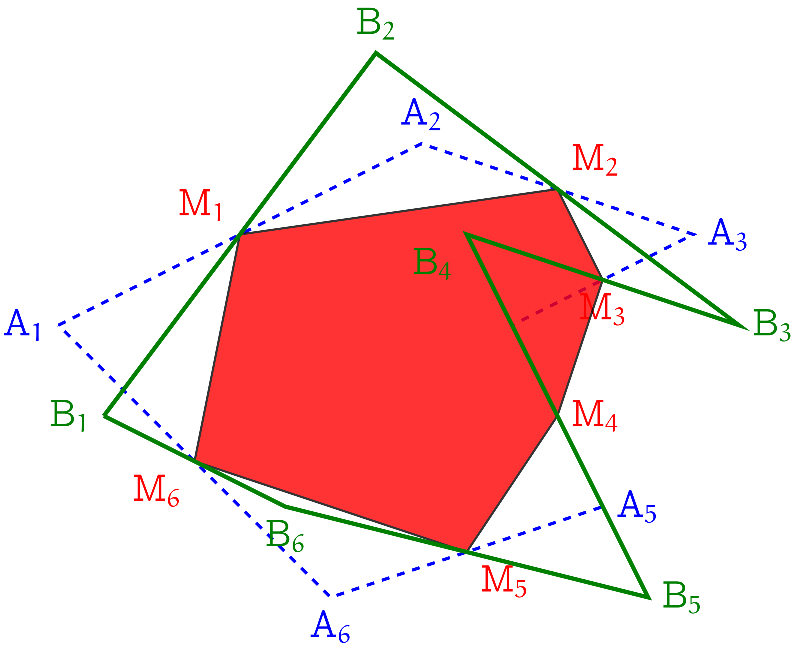
Toutes ces opérations sont bien sûr faisables à la règle et au compas.

Si par extraordinaire on était parti de $B_1 = A_1$, on obtiendrait $B_1' = B_1$ et on aurait identifié le polygone original. Maintenant, dans presque tous les cas, $B_1' \neq B_1$. Comment peut-on identifier le polygone initial à partir de ces points ?

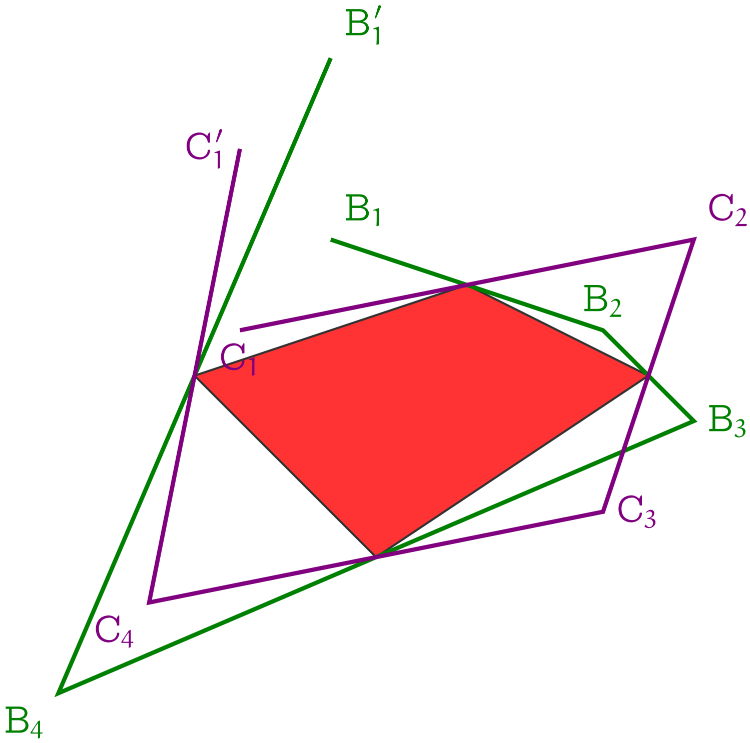


Si on note s_i la symétrie par rapport à M_i, on a donc $B_1' = f(B_1)$, où $f = s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots s_2 \circ s_1$ est la composée des n symétries centrales. Il est alors important de distinguer deux cas suivant la parité de n :

– Si n est impair, f est la composée d'un nombre impair de symétries donc c'est une symétrie centrale. Soit O le milieu du segment $[A_1 A_1']$. C'est le centre de symétrie de f ; en particulier $f(O) = O$. Cela signifie qu'en partant de $O = O_1$ et en refaisant notre construction itérative, nous retomberons sur $O_1' = O$. Ainsi, $M_1 M_2 \cdots M_n$ est le polygone des milieux de $O_1 O_2 \ldots O_n$. (Comme une symétrie centrale n'a qu'un seul point fixe, c'est d'ailleurs la seule solution : $O_1 O_2 \cdots O_n = A_1 A_2 \cdots A_n$.)
– Si n est pair, f est la composée d'un nombre pair de symétries donc c'est une translation. Deux sous-cas se présentent alors :
  – Si f est l'identité, cela signifie que $B_1' = B_1$: on a ainsi construit un polygone qui convient du premier coup, quel que soit le point de départ.



- Dans les autres cas, $B_1' \neq B_1$, et il en aurait été de même quel que soit le point de départ : cela signifie que f n'a pas de point fixe et qu'il est impossible de trouver un polygone dont $M_1M_2\cdots M_n$ soit le polygone des milieux.



On peut donc résumer la construction de la façon suivante :
- en partant d'un point quelconque B_1, on construit son symétrique B_2 par rapport à M_1 ;
- on construit ensuite le symétrique B_3 de B_2 par rapport à M_2 ;
- ...
- enfin, on construit le symétrique B_1' de B_n par rapport à M_n.

À ce moment, si $B_1' = B_1$, on a trouvé un polygone dont $M_1M_2\cdots M_n$ est le polygone des milieux. Si $B_1' \neq B_1$ et que n est impair, on recommence la construction par rapport au milieu A_1 du segment $[B_1B_1']$ et on obtient le polygone $A_1A_2\cdots A_n$ qui convient. Si $B_1' \neq B_1$ et que n est pair, $M_1M_2\cdots M_n$ n'est le polygone des milieux d'aucun polygone.

Des probabilités dans l'avion

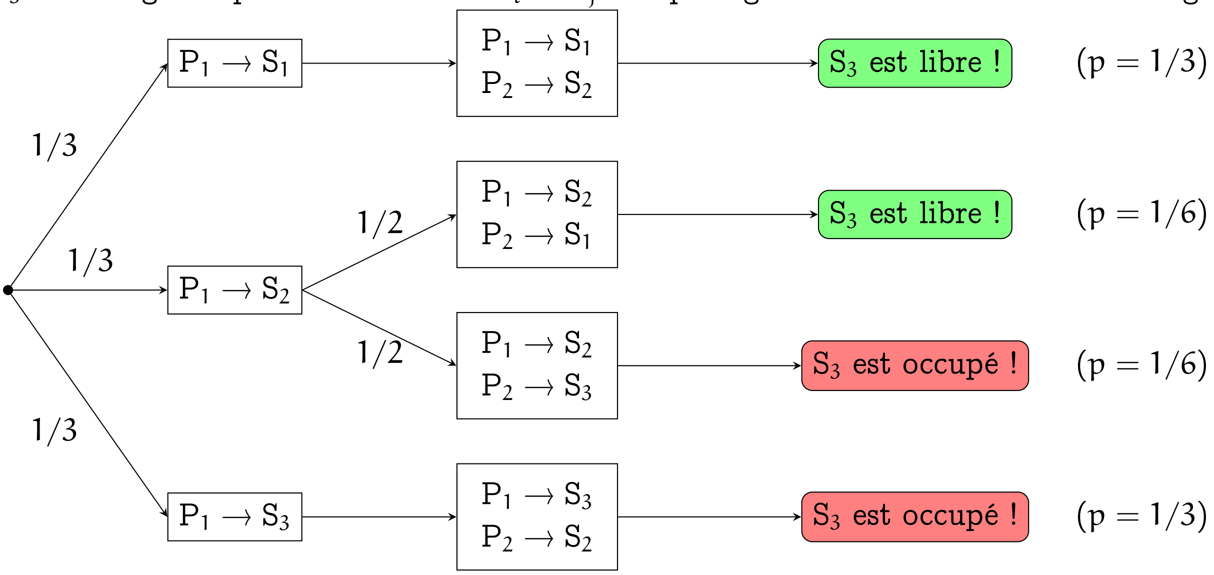
Question

Des passagers embarquent à bord d'un Airbus A380. L'avion est complet. Idéalement, les passagers devraient embarquer un à un et s'asseoir à leur place. Cependant, le premier passager, étourdi, s'assoit à une place aléatoire. Ensuite, les passagers s'assoient à leur place si elle est libre, et à une place libre, aléatoirement, sinon. Vous embarquez le dernier. Quelle est la probabilité que votre place soit occupée ?

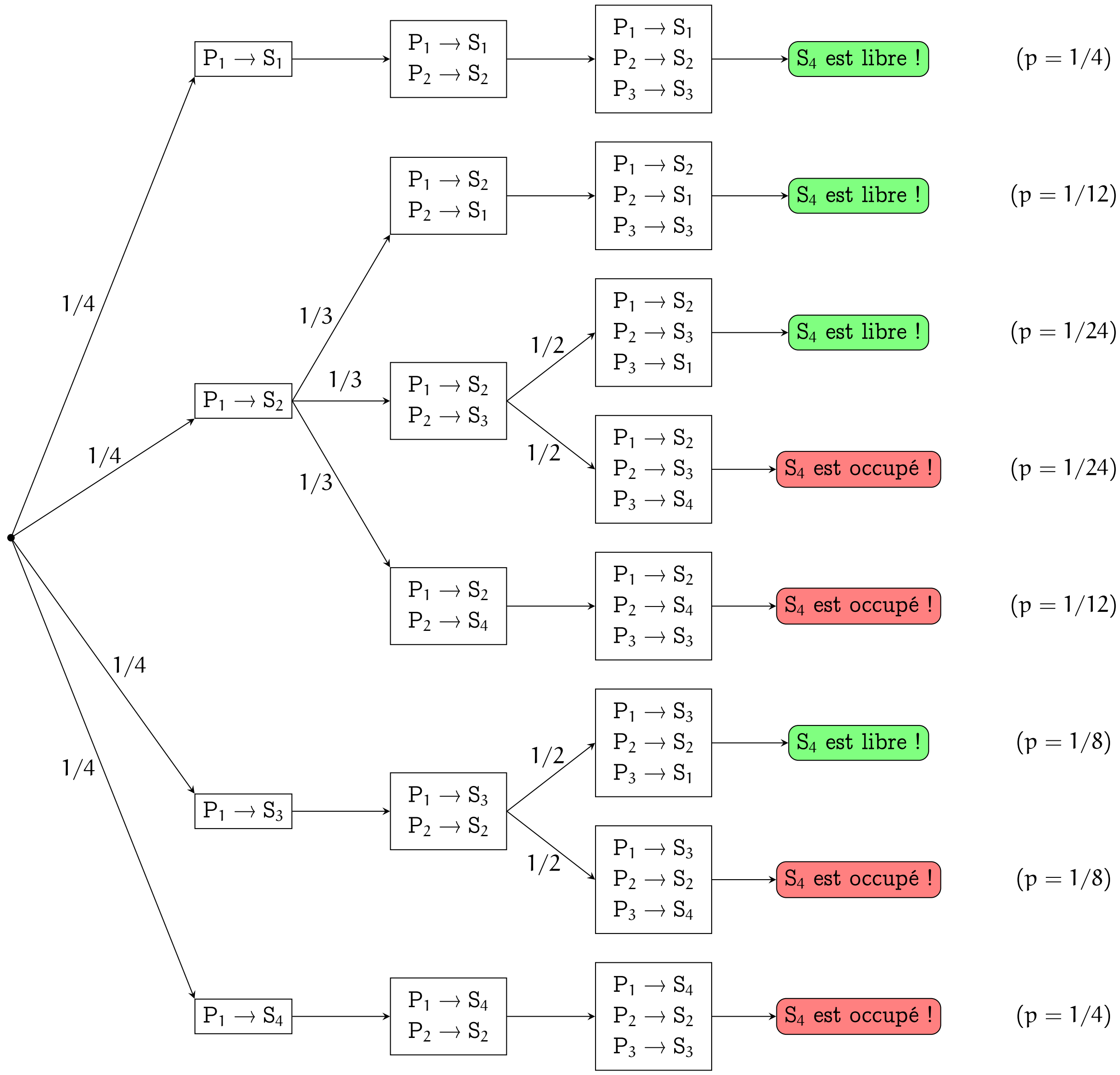
Réponse

Commençons à remplacer l'Airbus A 380 par un avion plus petit. Si l'avion n'a que deux places, la probabilité est $1/2$: soit le passager étourdi s'assied à sa place et la mienne sera libre, soit il s'assied à la mienne et elle sera occupée.

Dans le cas de trois passagers, la situation est un peu plus compliquée, mais on peut encore étudier tous les cas. Appelons-les P_1, P_2 et P_3, dans l'ordre dans lequel ils entreront dans l'avion (ainsi, P_1 est l'étourdi par qui les ennuis arrivent et je suis P_3) et notons S_1, S_2 et S_3 leurs sièges respectifs. On notera $P_i \to S_j$ si le passager numéro i s'assied dans le siège j.



On pourrait même envisager de traiter le cas d'un avion à quatre passagers, mais les détails deviennent un peu pénibles :



On observe que dans nos deux cas, la probabilité cherchée est $1/2$. Démontrons que c'est toujours le cas. On peut rédiger cette preuve de nombreuses façons : choisissons pour le moment d'utiliser le vocabulaire des variables aléatoires.

Observons ce qui se passe quand les k premiers passagers P_1, P_2, ..., P_k sont installés dans l'avion ($1 \leqslant k < n$). Les sièges $S_2, \dots, S_k$ sont alors occupés (si S_k n'est pas occupé par P_k, c'est que celui-ci l'a déjà trouvé occupé quand il est monté dans l'avion). Ainsi, quand les k premiers passagers sont dans l'avion, les sièges occupés sont $S_2, \dots, S_k$ et un autre siège. Appelons N_k le numéro de ce siège.

Chaque N_k est une variable aléatoire vivant dans $\{1\} \cup \{k+1, k+2, \dots, n\}$. On a donc une suite $(N_k)_{k=1}^{n-1}$ de variables aléatoires et la probabilité cherchée est $P(N_{n-1} = 1)$. (En effet, $N_{n-1} \in \{1, n\}$), donc soit $N_{n-1} = 1$ et le siège S_n est libre, soit $N_{n-1} = n$ et le siège S_n est occupé.) Au commencement, N_1 suit une loi uniforme : N_1 est simplement le siège occupé par P_1. On a donc $P(N_1 = i) = 1/n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Nous allons montrer par récurrence que N_k suit également une loi uniforme, c'est-à-dire que

$$\forall i \in \{1\} \cup \{k+1, \dots, n\}, \quad P(N_k = i) = \frac{1}{n-k+1}.$$

Pour cela, analysons ce qui se passe au moment où P_{k+1} rentre dans l'avion. Par définition, les sièges occupés sont exactement $S_2, \dots, S_k$ et S_{N_k}.

– Si $N_k \neq k+1$, le siège S_{k+1} est donc libre, et P_{k+1} s'y assied. On a donc $N_{k+1} = N_k$.
– Sinon, P_{k+1} s'assied sur un des sièges libres, c'est-à-dire que N_{k+1} prend l'une des valeurs 1 ou $k+2, k+3, \dots, n$ avec égale probabilité.

En formules, pour tout $i \in \{1\} \cup \{k+2, \dots, n\}$, on a donc

$$\begin{aligned} P(N_{k+1} = i \,|\, N_k = k+1) &= \frac{1}{n-k}, \\ P(N_{k+1} = i \,|\, N_k \neq k+1) &= P(N_k = i \,|\, N_k \neq k+1) = \frac{1}{n-k}. \end{aligned}$$

Ces deux probabilités étant égales, la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} P(N_{k+1} = i) &= \frac{1}{n-k} \cdot P(N_k = k+1) + \frac{1}{n-k} \cdot P(N_k \neq k+1) \\ &= \frac{1}{n-k}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$P(\text{je trouve mon siège libre}) = P(N_{n-1} = 1) = 1/2.$$

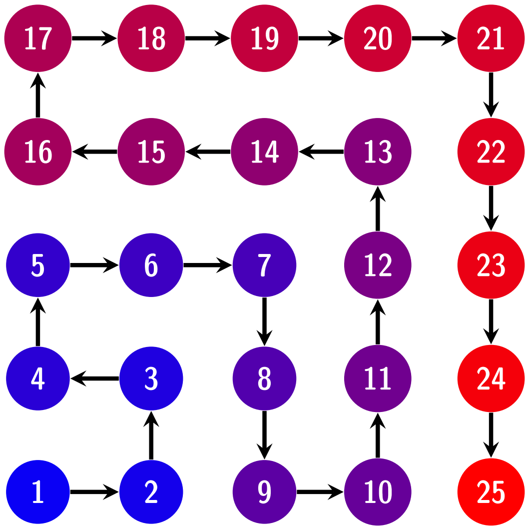
On peut maintenant donner une rédaction plus imagée de notre preuve : dans la réalité, les passagers d'un avion découvrant quelqu'un à leur place ne s'effacent pas si facilement, mais ont plutôt tendance à chasser (poliment) le passager égaré. Qu'est-ce que ce modèle plus réaliste change au problème ?

En fait, pas grand chose : les sièges occupés à un instant donné avec l'un ou l'autre modèle sont les mêmes. La seule différence est que dans ce nouvau modèle, les passagers $P_2, \dots, P_k$ sont assis à leur place et que c'est P_1 qui se déplace, à chaque fois qu'il est chassé d'un siège par son propriétaire légitime, jusqu'à atterrir sur S_1 ou S_n. Or, à chaque fois que P_1 choisit aléatoirement un siège, la probabilité de choisir S_1 est égale à celle de choisir S_n. Au moment où j'entrerai dans l'avion, P_1 sera donc sur l'un de ces deux sièges avec la même probabilité, ce qui entraîne bien que la probabilité que je trouve mon siège libre est $1/2$.

Nombres sur une grille

Question

Les points d'une grille sont numérotés suivant la trajectoire illustrée sur le dessin. Quel est le nombre à la gauche de 2015 ?



Réponse

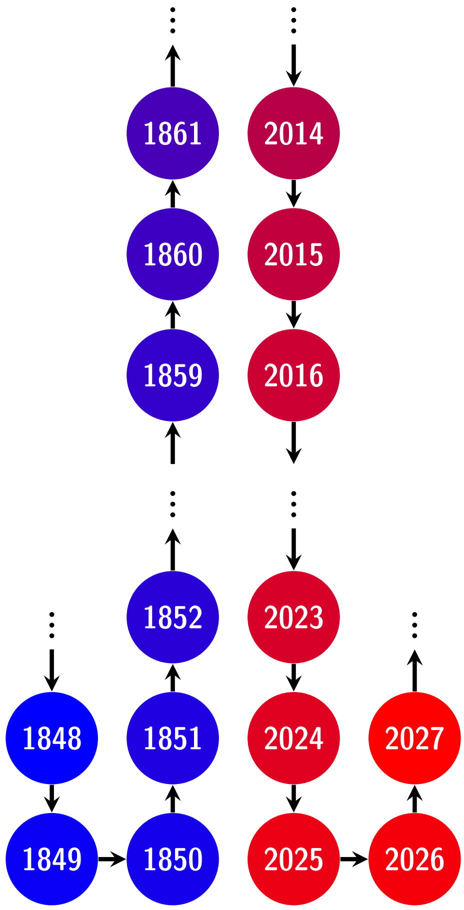
Puisque la trajectoire remplit petit à petit les carrés $n \times n$, le plus grand nombre dans le carré $n \times n$ est n^2. Il est alternativement en bas à droite et en haut à gauche du carré. (Notons que cela est une « preuve sans mot » de l'égalité $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.)

En tâtonnant un peu ou en prenant une calculatrice, on observe que

$$1936 = 44^2 < 2015 < 2025 = 45^2.$$

2025 est le carré d'un nombre impair, donc il est sur la rangée du bas. Comme 2015 est (largement) plus proche de 2025 que de 1936, il se trouvera à la verticale de 2025.

Nous trouvons donc $43^2 = 1849$ deux cases à sa gauche et, par conséquent, 1850 immédiatement à sa gauche. Le nombre à la gauche de $2015 = 2025 - 10$ est donc $1850 + 10 = 1860$.


1861
2014
1860
2015
1859
2016
1852
2023
1848
1851
2024
2027
1849
1850
2025
2026

Collisions

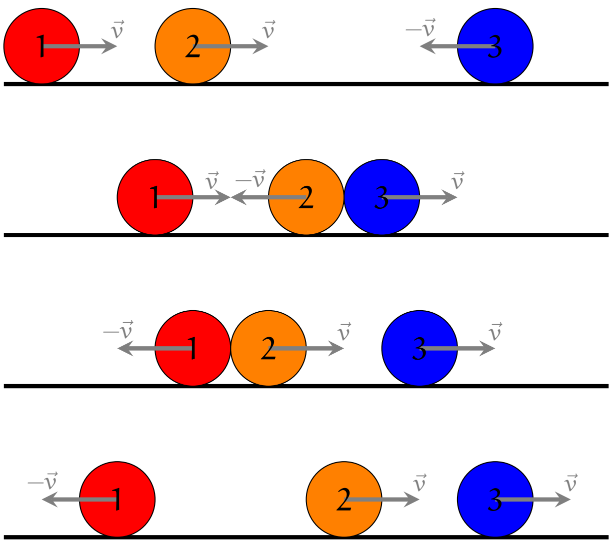
Question

$n+m$ boules se déplacent sur une droite. À l'instant $t=0$, les n boules de gauche ont une vitesse $\vec{v}$ dirigée vers la droite, alors que les m boules de droite ont une vitesse $-\vec{v}$ (dirigée vers la gauche, donc). On néglige tous les frottements et on suppose que les chocs sont élastiques, de telle sorte que la vitesse d'une boule à un instant donné est toujours $\pm\vec{v}$. Combien de collisions vont-elles se produire ?

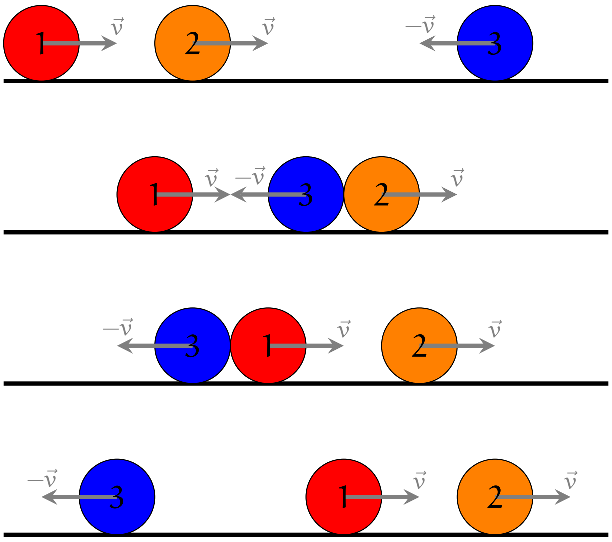
Réponse

La réponse est qu'il se produira nm collisions. Voyons pourquoi.

Comme dans le dessin suivant, numérotons les différentes boules, afin de les identifier.



Modifions un peu l'énoncé : supposons qu'au moment de chaque choc, un événement magique survienne et que les deux boules repartent *après avoir échangé leurs identités*. Le dessin suivant illustre la modification.



La modification ne fait que permuter les boules : à un instant donné, les $n + m$ boules sont (globalement) exactement aux mêmes endroits, et elles ont la même vitesse qu'avant la modification. En particulier, les collisions se produisent aux mêmes moments et elles sont en même nombre.

Mais la situation est maintenant plus simple à analyser : les n boules initialement à gauche ont toujours la même vitesse $\vec{v}$ et les m boules initialement à droite ont toujours la même vitesse $-\vec{v}$ (à part que les deux subissent une petite téléportation au moment de chaque choc, puisqu'elles échangent alors instantanément leur position avec la boule qui vient de les percuter). En particulier, chacune des n boules « de gauche » va percuter exactement une fois chacune des m boules « de droite. »

Il y a donc bien en tout nm collisions.

Deviner le polynôme

Question

Alice et Bob jouent à un jeu : Bob pense à un polynôme P à coefficients entiers positifs et Alice doit le deviner. À chaque tour, Alice demande la valeur de P en un nombre entier, et Bob la lui donne. En combien de tours Alice pourra-t-elle deviner P ?

(Précisons qu'Alice sait que les coefficients de P sont des entiers positifs, mais qu'elle n'en sait pas plus. En particulier, elle n'a aucune information sur son degré.)

Réponse

Alice peut déterminer le polynôme avec seulement deux questions.

Pour cela, remarquons que si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_k \in \mathbb{N}$ et qu'un entier n est strictement plus grand que tous les a_k, la donnée de $P(n)$ détermine le polynôme P :

$$P(n) = \sum_{k=0}^{d} a_k n^k$$

et les a_k sont simplement les « chiffres » de l'écriture de $P(n)$ en base n.

Ainsi, Alice peut poser la première question « Combien vaut $P(1)$? » La réponse de Bob est $P(1) = \sum_{k=0}^{d} a_k$, qui est évidemment plus grand (au sens large) que les coefficients a_k.

Alice n'a alors plus qu'à prendre n'importe quel entier $n > P(1)$ et à demander la valeur de $P(n)$.

Une inégalité

Question

Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a+b+c=1$. Montrer que $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Réponse

Proposons deux méthodes :

- On peut interpréter le problème géométriquement : $P = \{a+b+c=1\}$ est un plan affine dont le vecteur normal est $(1,1,1)$. La quantité $a^2+b^2+c^2$ est donc le carré de la distance d'un point (a,b,c) de ce plan à l'origine $O=(0,0,0)$. Cette quantité est donc minimale pour le point (a,b,c) le plus proche de O, c'est-à-dire pour le projeté orthogonal de O sur le plan P. Puisque $(1,1,1)$ est le vecteur normal à P, la droite orthogonale à P et passant par l'origine est simplement $\{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, qui intersecte P en $H=(1/3,1/3,1/3)$.
  Ainsi, H est le point de P le plus proche de l'origine O et
  $$a^2+b^2+c^2 \geqslant OH^2 = (1/3)^2+(1/3)^2+(1/3)^2 = 1/3.$$
- On peut également procéder à la démonstration plus algébriquement. Si $a+b+c=1$, on a également
  $$1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = \delta+2ab+2ac+2bc,$$
  où $\delta = a^2+b^2+c^2$ est la quantité que l'on cherche à minorer.
  Par ailleurs, l'inégalité $2ab \leqslant a^2+b^2$ (avec ses deux semblables mettant en jeu a,c et b,c) permet d'en déduire
  $$1 \leqslant \delta+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2) = \delta+2(a^2+b^2+c^3) = 3\delta.$$
  On a donc bien démontré
  $$\delta = a^2+b^2+c^2 \leqslant 1/3.$$

2015 zéros

Question

Les nombres de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que F_n se termine par 2015 zéros.

Réponse

En fait, étant donné un nombre entier a quelconque, on peut démontrer qu'il existe $n > 0$ tel que F_n soit divisible par a. On aura donc le résultat souhaité en posant $a = 10^{2015}$.

On peut maintenant considérer les nombres de Fibonacci $\overline{F}_n$ modulo a. Il s'agit donc d'éléments de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ vérifiant la même relation de récurrence $\overline{F}_{n+1} = \overline{F}_n + \overline{F}_{n-1}$.

Puisqu'il y a une infinité de nombres entiers et seulement a^2 couples d'éléments de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$, le couple $(\overline{F}_n, \overline{F}_{n+1})$ se répètera nécessairement :

$$\exists m < n : (\overline{F}_n, \overline{F}_{n+1}) = (\overline{F}_m, \overline{F}_{m+1}).$$

La connaissance de $\overline{F}_n$ et $\overline{F}_{n+1}$ permet alors de déterminer les valeurs précédentes de la suite. Par exemple, $\overline{F}_{n-1} = \overline{F}_{n+1} - \overline{F}_n$. Ainsi, on aura également l'égalité $\overline{F}_{n-1} = \overline{F}_{m-1}$ et, par récurrence,

$$\forall k \leqslant m, \overline{F}_{n-k} = \overline{F}_{m-k}.$$

En prenant $k = m$, il vient $\overline{F}_{n-m} = \overline{F}_0 = \overline{0}$, ce qui signifie bien que F_{n-m} est divisible par a.

Organisation d'un tournoi

Question

La fédération française de Calvinball cherche à organiser le championnat de France 2015. Pour la commodité de tous, ils décident de minimiser la distance totale parcourue par les participants. Or, plus de la moitié de ces participants vit à Lille et ceux-ci affirment que le tournoi devrait donc se tenir dans leur ville. Au contraire, les non-Lillois maintiennent que le choix d'une ville plus centrale serait une meilleure idée. Qui a raison ?

Réponse

Les Lillois ont raison.

Notons L la ville de Lille, n le nombre de participants Lillois et $A_1, \dots, A_m$ les villes où habitent les participants qui ne sont pas Lillois (par hypothèse, $n > m$). Si le tournoi a lieu à Lille, la distance totale parcourue par les participants sera

$$d_L = \sum_{i=1}^{m} LA_i.$$

En revanche, si le tournoi est organisé dans une autre ville $V \neq L$, la distance totale parcourue sera

$$d_V = \sum_{i=1}^{m} VA_i + n \cdot VL.$$

D'après l'inégalité triangulaire, $LA_i \leqslant VL + VA_i$, donc

$$d_L = \sum_{i=1}^{m} LA_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} (VL + LA_i) = m \cdot VL + \sum_{i=1}^{m} LA_i = d_V - (n - m)VL.$$

Comme $VL > 0$ et $n > m$, on a bien $d_L < d_V$, comme l'affirmaient les participants Lillois.

Treize nombres réels

Question

Montrer que parmi tout ensemble de treize nombres réels distincts, on peut en trouver deux (a et b) tels que $\dfrac{a-b}{1+ab} \leqslant 2-\sqrt{3}$.

Réponse

Il s'agit ici de reconnaître la formule de différence pour la tangente :

$$\forall x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}.$$

Comme la fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective, on peut écrire les treize nombres de notre ensemble sous la forme $\tan x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 13$. Quitte à réordonner les (x_i), on a donc

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \cdots < x_{12} < x_{13} < \frac{\pi}{2}.$$

Puisque les douze intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ (pour $1 \leqslant i \leqslant 12$) sont disjoints, la somme de leurs longueurs est inférieure à π. On peut donc trouver $1 \leqslant i \leqslant 12$ tel que $x_{i+1} - x_i \leqslant \frac{\pi}{12}$.

Si on pose $b = \tan x_i$ et $a = \tan x_{i+1}$ (qui sont des éléments de l'ensemble de départ), la croissance de la fonction tangente entraîne que

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} = \frac{\tan x_{i+1} - \tan x_i}{1+\tan(x_i)\tan(x_{i+1})} = \tan(x_{i+1}-x_i) < \tan\frac{\pi}{12}.$$

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ pour conclure.

La formule du doublement de l'angle $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ montre que $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui entraîne $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. On a alors $\sin^2\frac{\pi}{12} = 1-\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Tout cela entraîne

$$\tan^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2.$$

et donc, puisque $\tan\frac{\pi}{12} > 0$,

$$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}.$$

Pas d'anagrammes parmi les puissances de 2

Question

On dit qu'un entier n est une *anagramme* de m si on peut écrire n en permutant les chiffres de m. On ne compte pas les 0 non significatifs que l'on peut ajouter à gauche : 330 est une anagramme de 303, mais pas de (0)33.

Une puissance de 2 peut-elle être l'anagramme d'une autre puissance de 2 ?

Réponse

Si $n = 2^a$ est une anagramme de $m = 2^b$, ils ont particulier le même nombre r de chiffres. Cela signifie que $10^{r-1} \leqslant n, m < 10^r$. Or, comme $2^4 = 16 > 10$, on ne peut jamais trouver cinq puissances de 2 ayant le même nombre de chiffres. (En fait, le nombre de puissances de 2 ayant k chiffres vaut toujours 3 ou 4, mais on n'en a pas besoin ici).

Par ailleurs, si deux nombres sont anagrammes l'un de l'autre, la somme de leurs chiffres est la même, et ils sont donc congrus modulo 9. Or, les puissances de 2, modulo 9, sont périodiques de période 6 : $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod 9$:

k modulo	0	1	2	3	4	5
2^k modulo 9	1	2	4	8	7	5

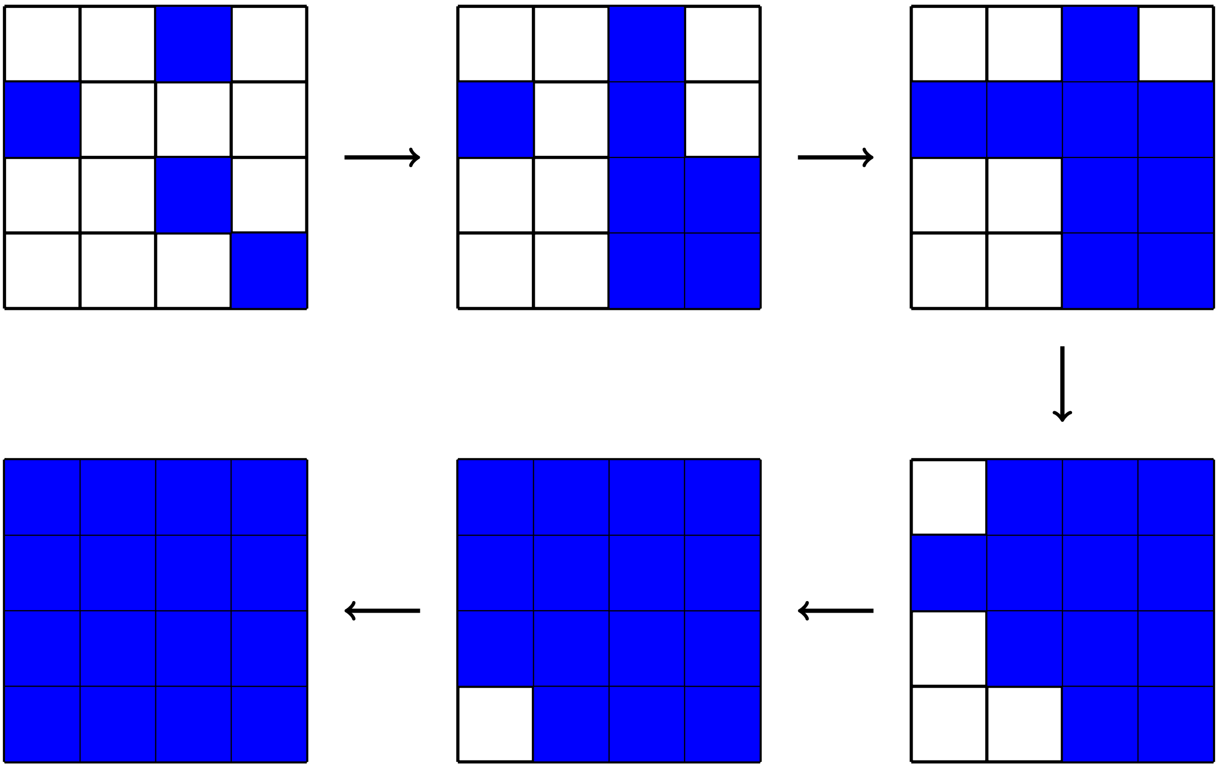
Ainsi, quatre puissances consécutives de 2 n'auront des sommes de chiffres égales, donc, en particulier, les puissances de 2 ne sont jamais des anagrammes l'une de l'autre.

Allumage d'un damier

Question

Dans un damier $n \times n$, les cases peuvent être *allumées* ou *éteintes*. Ensuite, le damier évolue selon la règle suivante : les cases ne s'éteignent jamais, et une case s'allume à une étape donnée si au moins deux de des voisines sont allumées. (On appelle *voisines* deux cases qui ont un côté en commun. Ainsi, une case a, suivant sa position sur le damier, deux, trois ou quatre voisines).

Voici un exemple de disposition initiale qui aboutit, après un nombre fini d'étapes, en un damier complètement allumé :

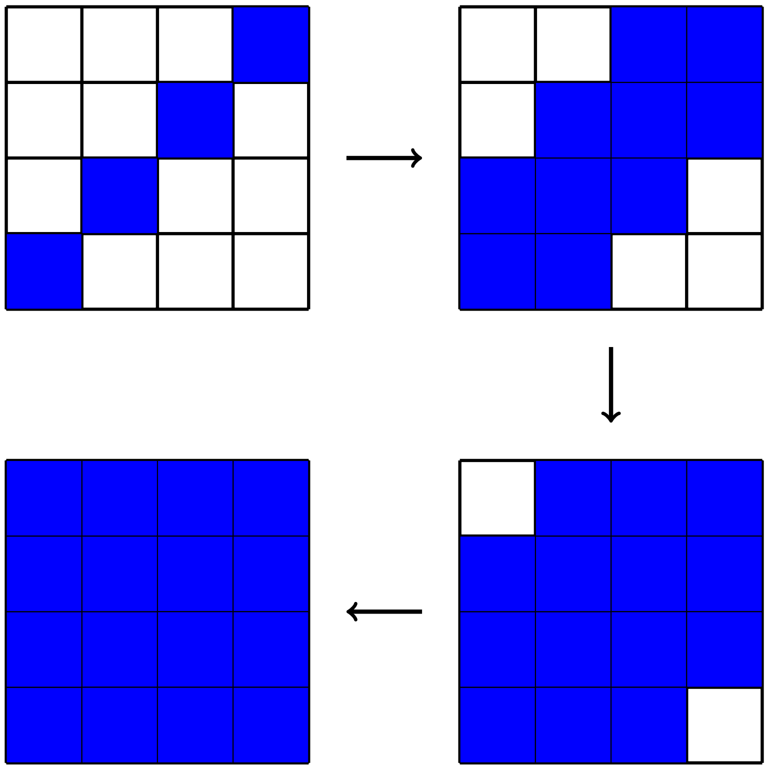


Quel est le nombre de cases minimal qu'il faut allumer au début du processus pour aboutir à un damier complètement allumé ?

Réponse

La réponse est qu'il faut allumer au minimum n cases pour aboutir à un damier complètement allumé.

Les configurations initiales à n cases qui conviennent sont nombreuses, mais le plus simple est probablement d'allumer une diagonale du damier. On vérifie aisément qu'après $n-1$ étapes, le damier est totalement allumé.



L'autre sens est plus délicat : il s'agit de montrer que si le damier comporte initalement moins de n cases allumées, le processus n'aboutira pas au damier totalement allumé.

Pour cela, nous allons montrer qu'étape après étape, le périmètre de la zone allumée (en comptant les côtés qui sont au bord du damier) ne peut que décroître.

En effet, imaginons qu'à chaque étape, on allume les nouvelles cases une par une plutôt que toutes ensemble. Quand on allume une nouvelle case, le périmètre de la zone allumée croît de $(4 - \nu) - \nu = 4 - 2\nu$, où ν est le nombre de voisines de la case qui étaient allumées.

Par définition, $\nu \geqslant 2$ (c'est la condition pour qu'une case soit allumée[1]). On a donc $4 - 2\nu \leqslant 0$, ce qui montre que le périmètre décroît au sens large.

Si on aboutit à un damier complètement allumé, le périmètre de la zone allumée au début de l'évolution doit donc valoir au moins $4n$ (le périmètre du damier tout entier). Ainsi, chaque case ayant quatre côtés, il faut au moins n cases allumées sur le damier initial.

1. Remarquons que ν n'est pas le nombre ν_0 de voisines de notre case qui sont allumées à l'étape précédente. Puisque dans ce raisonnement, on allume les cases les unes après les autres, il est possible que $\nu > \nu_0$. Mais on a simplement besoin de l'inégalité $\nu \geqslant 2$, donc cette subtilité ne nous gêne pas dans la preuve.

Dénombrement des ensembles sans répétition

Question

Combien y a-t-il de parties de $\{1,2,\ldots,n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs ?

Réponse

La réponse est le $(n+2)$-ième nombre de Fibonacci [1].

La manière la plus simple de démontrer ce résultat est probablement d'établir que le nombre p_n de parties de $\{1,2,\ldots,n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs vérifie la relation de récurrence $p_{n+2} = p_n + p_{n+1}$. Il suffit ensuite de vérifier que $p_1 = F_3 = 2$ (les deux parties $\varnothing$ et $\{1\}$ vérifient tautologiquement la condition) et $p_2 = F_4 = 3$ (les trois parties $\varnothing$, $\{1\}$ et $\{2\}$ vérifient la condition, contrairement à $\{1,2\}$).

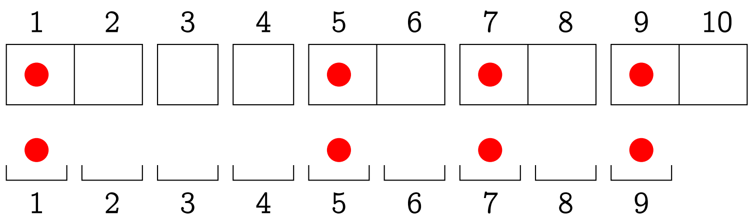
Pour cela, remarquons que les parties de $\{1,2,\ldots,n+2\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs se partagent en deux types :

- Les parties contenant $n+2$ ne peuvent pas contenir $n+1$. Elles s'écrivent donc $F \sqcup \{n+2\}$, où F est une partie de $\{1,2,\ldots,n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Réciproquement, pour une telle partie F, $F \sqcup \{n+2\}$ ne contient pas deux entiers consécutifs. Le nombre de ces parties est donc p_n.
- Les parties ne contenant pas $n+2$ sont simplement les parties de $\{1,\ldots,n+1\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Il y en a donc p_{n+1}.

Ce petit dénombrement démontre donc la relation de récurrence, et conclut la preuve.

Une autre preuve de ce résultat consiste à se ramener à une définition combinatoire classique des nombres de Fibonacci : F_{m+1} est le nombre de façons de décomposer m en une somme $i_1 + \cdots + i_d = m$, où les i_k valent 1 ou 2. Cette caractérisation est d'ailleurs à l'origine de la première apparition des nombres de Fibonacci dans l'histoire, à propos de règles de prosodie en sanskrit. [2]

Étant donné une telle somme, que l'on peut voir comme un pavage du rectangle $1 \times m$ par des rectangles 1×1 et 1×2, les premières cases des rectangles 1×2 forment une partie de $\{1,2,\ldots,m-1\}$ sans deux entiers consécutifs.



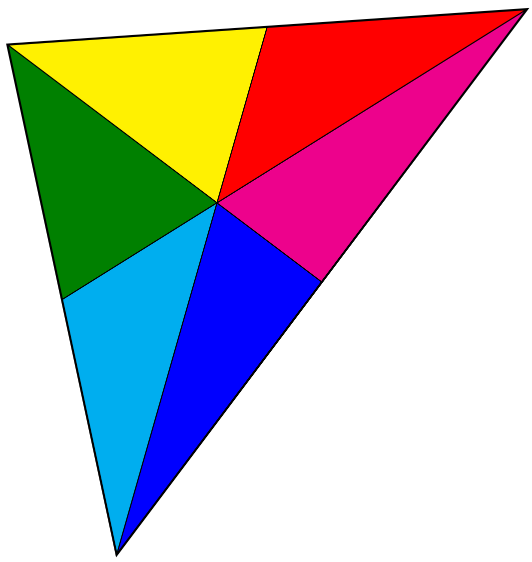
1. On choisit de numéroter les nombres de Fibonacci en commençant par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.
2. Si chaque syllabe d'un mot peut être courte (auquel cas elle compte pour un temps) ou longue (deux temps), il s'agit de compter le nombre de profils prosodiques pouvant exister pour un vers de m temps..

Il n'est pas difficile de voir que cette construction réalise une bijection entre ces pavages du rectangle $1 \times m$ et les parties de $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ sans entiers consécutifs. Le nombre de parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est donc bien F_{n+2}.

Découpage d'un triangle

Question

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes et le découpent donc en six petits triangles.

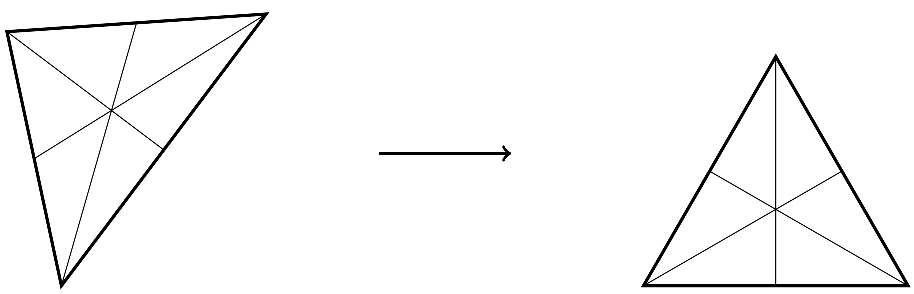


Montrer que ces six triangles ont les mêmes aires.

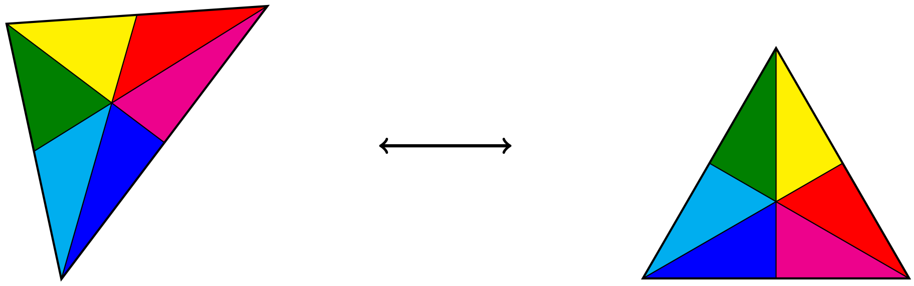
Réponse

Il est évidemment possible de donner beaucoup de preuves différentes de ce résultat, plus ou moins calculatoires.

La plus conceptuelle est probablement de considérer que si ABC est un triangle non dégénéré, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan vectoriel. Il est donc possible de trouver une transformation linéaire envoyant cette base sur la base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\right)$. Autrement dit, il existe une transformation affine envoyant le triangle ABC sur le triangle équilatéral standard.



Or, une transformation affine multiplie les aires par un facteur constant (la valeur absolue du déterminant de la transformation linéaire associée). Ainsi, le cas d'un triangle non dégénéré se ramène à celui du triangle équilatéral. Or, pour celui-ci, l'énoncé est évident car les six petits triangles sont en fait isométriques.



Ainsi, la propriété est démontrée pour tous les triangles.

Des inégalités impossibles

Logo

$$\begin{cases} a(1-b) > \dfrac{1}{4}, \\ b(1-c) > \dfrac{1}{4}, \\ c(1-a) > \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Question

Soit a, b et c des nombres positifs. Montrer que l'on ne peut pas avoir simultanément les trois inégalités suivantes.

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Réponse

Si $a \geqslant 0$ et $a(1-b) > \frac{1}{4} > 0$, le nombre $1-b$ est lui aussi positif, donc $b \leqslant 1$. Ainsi, on a $a, b, c \in [0, 1]$.

Une manière de répondre à la question est alors d'utiliser le résultat suivant :

Proposition. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

La preuve de cette proposition est aisée : $x(1-x) = x - x^2$ est un polynôme du second degré de coefficient dominant négatif. Son maximum est donc atteint au milieu de ses racines, c'est-à-dire en $\frac{1}{2}$.

Ainsi, en multipliant trois copies de cette inégalité (une pour chacune des variables), on obtient

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

Or, si les trois inégalités de la question étaient vraies, on obtiendrait en les multipliant

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{64},$$

ce qui est impossible.

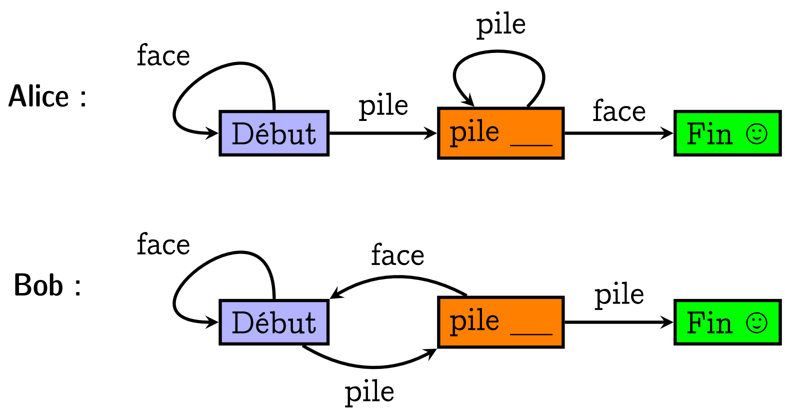
Un jeu de pile ou face

Question

Alice lance une pièce équilibrée de façon répétée, jusqu'à obtenir un « pile » suivi d'un « face ». Bob, quant à lui, procède de même jusqu'à obtenir deux « pile » consécutifs. En moyenne, qui attendra le plus longtemps ?

Réponse

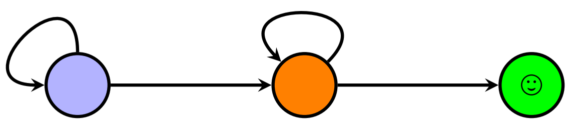
C'est Bob qui attendra le plus longtemps en moyenne : intuitivement, Alice et Bob devront tous les deux obtenir un premier « pile » avant d'espérer gagner. S'ils obtiennent juste après le résultat souhaité (« face » pour Alice, « pile » pour Bob), ils ont gagné et le jeu s'arrête. Mais la symétrie ne va pas plus loin : si le lancer suivant leur est défavorable (« pile » pour Alice, « face » pour Bob), Bob est en quelque sorte revenu à la case départ, c'est-à-dire qu'il doit à nouveau obtenir un premier pile avant de pouvoir espérer gagner alors qu'Alice a encore son premier « pile », et n'a plus qu'à attendre un « face ».



Le calcul va confirmer cette intuition.

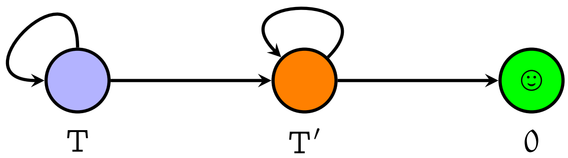
Temps d'attente moyen pour Alice

On peut réinterpréter l'expérience (pour Alice) comme un parcours dans le graphe suivant :



Alice part du sommet bleu. À chaque coup, suivant le résultat du lancer de sa pièce, elle emprunte une des deux flèches partant du sommet où elle se trouve. L'expérience s'arrête quand elle arrive au sommet vert.

Pour résoudre cette question, on se fixe en fait un objectif plus ambitieux : déterminer le temps moyen que va durer l'expérience pour **tous** les sommets de départ possibles pour Alice. Puisqu'évidemment l'expérience s'arrête immédiatement si Alice part directement du sommet vert, il y a en fait deux temps moyens à déterminer : le temps moyen T si l'on part du sommet bleu (qui est donc le temps que nous voulons vraiment déterminer) et le temps moyen T′ si l'on part du sommet vert.



On obtient alors des relations entre ces différents temps :

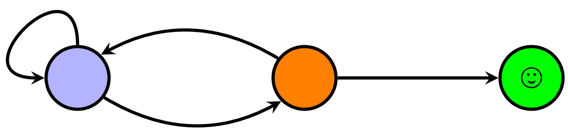
– Si l'on part du sommet bleu, on sera au coup suivant sur le sommet bleu (avec probabilité $1/2$) ou sur le sommet orange (avec probabilité $1/2$). Dans le premier cas, on est revenu au point de départ : on va encore attendre T en moyenne. Dans le second, on va encore devoir attendre T′. Ainsi, le temps d'attente moyen T est la moyenne de T et T′, à laquelle on ajoute 1 (pour prendre en compte le coup qui nous amène au sommet suivant). En formules :
$$\mathrm{T} = 1 + \frac{\mathrm{T} + \mathrm{T}'}{2}.$$
– On peut tenir le même raisonnement si l'on part du sommet orange. Avec probabilité $1/2$, on se trouvera au coup suivant encore au sommet orange (auquel cas il faudra encore attendre T′ en moyenne) et avec probabilité $1/2$ on se trouvera au sommet vert (auquel cas l'expérience sera terminée). On a donc
$$\mathrm{T}' = 1 + \frac{\mathrm{T}' + 0}{2}.$$

Cette dernière relation donne immédiatement $\mathrm{T}' = 2$, et la première relation devient alors $\mathrm{T} = 2 + \mathrm{T}/2$, ce qui donne $\mathrm{T} = 4$.

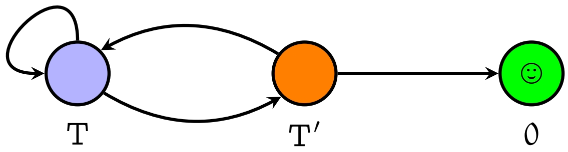
En moyenne, Alice devra donc attendre quatre coups pour arriver au sommet vert (c'est-à-dire pour observer « pile face »).

Temps d'attente moyen pour Bob

Les mêmes arguments fonctionnent pour Bob : l'expérience se ramène à un parcours aléatoire dans le graphe suivant.



Comme pour Alice, on va déterminer les temps d'attente moyens suivant le sommet de départ.



Les mêmes arguments que pour Alice donnent deux relations entre T et T', et l'on peut résoudre le système d'équations pour obtenir les deux valeurs cherchées.

$$\begin{cases} \mathrm{T} & = & 1+\dfrac{\mathrm{T}+\mathrm{T}'}{2} \\ \mathrm{T}' & = & 1+\dfrac{\mathrm{T}+0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{T} \quad -\mathrm{T}' & = & 2 \\ -\mathrm{T}+2\mathrm{T}' & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{T} & = & 6 \\ \mathrm{T}' & = & 4. \end{cases}$$

En moyenne, Bob devra donc attendre six coups pour arriver au sommet vert (c'est-à-dire pour observer « pile pile »).

Sortir d'une piscine

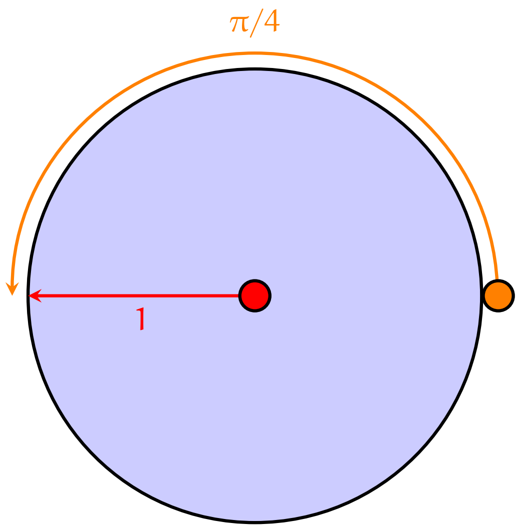
Question

Vous êtes au centre d'une piscine circulaire, au bord de laquelle se trouve un lion. Est-il possible de sortir de la piscine en toute sécurité (c'est-à-dire d'arriver à un point du bord de la piscine où ne se trouve pas le lion), sachant que le lion se déplace quatre fois plus vite que vous ?

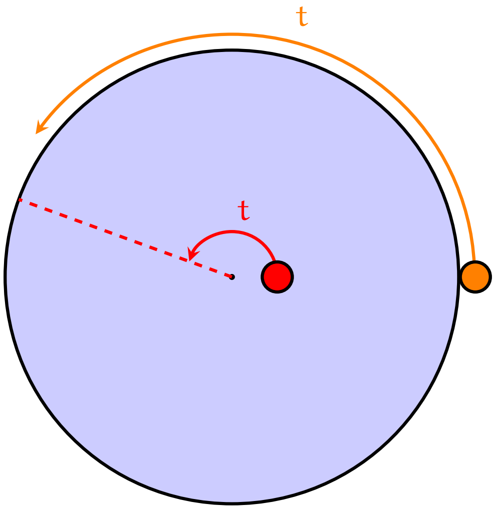
Réponse

Remarquons déjà que la question ne dépend pas de la taille de la piscine ni de la vitesse des protagonistes (tant que celle du lion reste quatre fois plus grande que celle du nageur). Pour fixer les idées, on va donc prendre comme unité de distance le rayon de la piscine et comme unité de temps le temps qu'il faut au nageur pour parcourir ce rayon.

Commençons par remarquer que la solution la plus grossière ne marche pas. Si le nageur part en ligne droite dans la direction opposée à l'endroit où se trouve le lion, il lui faudra une unité de temps pour atteindre le bord, alors que le lion, qui doit parcourir un demi-périmètre de la piscine (c'est-à-dire π fois la distance parcourue par le nageur), le fera en $\pi/4 < 1$ unité de temps.

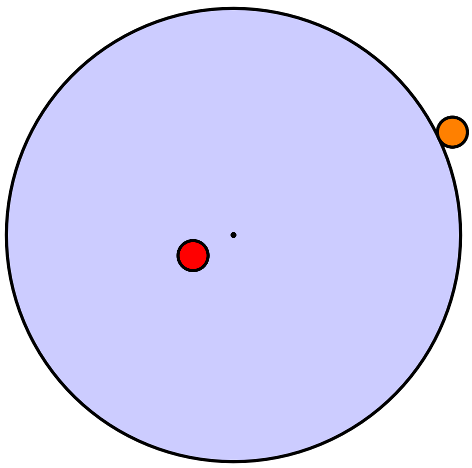


Cependant, le nageur a une solution pour « gagner du terrain » sur le lion. En effet, si le nageur tourne autour du centre de la piscine avec un rayon r suffisamment petit (strictement inférieur au quart du rayon de la piscine),, le lion ne peut pas « le suivre » et rester au point du bord le plus proche du nageur. Par exemple, si le nageur tourne avec un rayon égal au cinquième du rayon de la piscine, la vitesse angulaire du lion sera 4/5 fois la sienne.

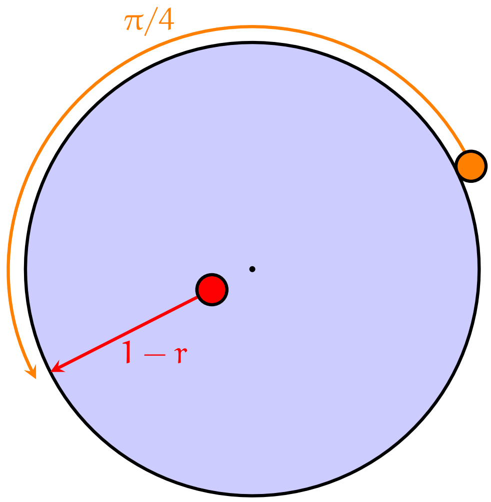


En particulier, en continuant à tourner avec un rayon r strictement inférieur au quart de celui de la piscine, le nageur peut arriver dans une situation où le lion est au point du bord le plus éloigné de sa propre position. (Remarquons que la vitesse angulaire du nageur n'étant que $1/4r$ fois plus grande que celle du lion, cette étape prend un temps d'autant plus grand que r est proche de $1/4$, en tout cas si le lion ne s'avoue pas vaincu et continue à « suivre » le nageur coûte que coûte).

On est donc arrivé à une situation meilleure qu'au départ : le nageur est un peu plus proche du bord (à distance $1 - r$), et le lion est au point du bord le plus loin.



On peut alors retenter la méthode un peu naïve consistant à nager en ligne droite dans la direction opposée à celle du lion :



Cette fois-ci, la méthode fonctionne si (et seulement si) $1 - r < \frac{\pi}{4}$, ce qui est équivalent à $r > 1 - \frac{\pi}{4}$.

Ainsi, notre méthode fonctionne si l'on peut trouver un rayon r qui vérifie à la fois $r < \frac{1}{4}$ (pour qu'on puisse arriver à distance $1-r$ du bord en laissant le lion à l'opposée) et $r > 1 - \frac{\pi}{4}$ (pour que la distance $1 - r$ soit suffisamment courte pour battre le lion « au sprint »).

Cela est possible car

$$\pi > 3 \text{ donc } 1 - \frac{\pi}{4} < \frac{1}{4}.$$

Remarque

Cette question est tirée d'un sujet MATh.en.JEANS du lycée Marcelin-Berthelot de Saint-Maur. Il est assez évident que la situation proposée, qui fonctionne très bien pour un lion quatre fois plus rapide que le nageur, n'est pas optimale : des stratégies plus fines permettraient sans aucun doute d'échapper à des lions bien plus rapides (notamment allant λ fois plus vite que la nageur, avec $\lambda \geqslant \pi + 1$, cas où notre stratégie échoue). Cette question semble appartenir à la thématique (difficile) des jeux différentiels. *A priori,* la conjecture naturelle est que la stratégie optimale pour le nageur est d'aller toujours dans la direction opposée à celle du lion (notons que cette direction change au cours du temps, alors que la phase de « sprint » dans notre stratégie se fait dans une direction constante), mais cela ne semble pas si facile à montrer...

Deux nombres premiers

Question

Déterminer les couples (p, q) de nombres premiers tels que $p + q = (p - q)^3$.

Réponse

Déjà, l'équation implique que p et q sont distincts. Comme il s'agit de nombres premiers, ils sont premiers entre eux.

Modulo $p + q$, on a la congruence $p - q \equiv -2q$, donc l'équation se réduit en

$$0 \equiv (p - q)^3 \equiv (-2q)^3 \equiv -8q^3 \pmod{p + q}.$$

Autrement dit, le nombre $p + q$ divise $8q^3$. Cependant, $p + q$ ne peut pas être un multiple de q (si c'était le cas, p serait également un multiple de q, mais on a dit que ces deux nombres étaient premiers entre eux). Ainsi, on obtient, par le lemme de Gauss, que $p + q$ divise 8. Comme p et q valent au moins 2, cela entraîne $p + q \in \{4, 8\}$. Mais la seule façon de décomposer 4 en somme de deux nombres premiers est $4 = 2 + 2$ (et $p = q = 2$ n'est pas une solution de notre équation) et la seule façon de décomposer 8 est $8 = 5 + 3$.

En injectant ces candidats dans l'équation, on obtient donc que la seule solution possible est $p = 5$ et $q = 3$.

Le plus grand nombre premier

Question

Le plus grand nombre premier connu à ce jour est $2^{57\,885\,161}-1$. Quels sont ses deux derniers chiffres ?

(On peut résoudre cette question sans ordinateur.)

Réponse

Il s'agit donc de calculer $p = 2^{57\,885\,161} - 1$ modulo 100.

Puisque $100 = 2^2 \times 5^2 = 4 \times 25$, le théorème chinois invite a calculer ce nombre modulo 4 et 25, pour en déduire sa valeur modulo 100.

Tout d'abord, modulo 4, l'énorme puissance de 2 se réduit évidemment à 0. On a donc

$$p \equiv -1 \pmod 4.$$

Ensuite, il faut examiner le comportement des puissances de 2 modulo 25. Pour cela, on peut par exemple remarquer que $2^{10} = 1024 \equiv 24 \equiv -1 \pmod{25}$. En élevant au carré, on a donc $2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$. (C'est également une conséquence du théorème d'Euler sur les congruences).

Par ailleurs, il est visible que $57\,885\,161 \equiv 1 \pmod{20}$. On peut donc trouver $r \in \mathbb{N}$ (qu'il serait facile mais inutile de calculer) tel que $57\,885\,161 = 20r + 1$. On peut alors calculer la réduction de p modulo 25 :

$$p = 2^{20r+1} - 1 = 2 \times (2^{20})^r - 1 \equiv 2 \times 1^r - 1 \equiv 1 \pmod{25}.$$

Ainsi, $p \equiv -1 \pmod 4$ et $p \equiv 1 \pmod{25}$. Le théorème chinois assure que cela détermine la réduction de p modulo 100. Ici, c'est assez facile à vérifier à la main : si un nombre est congru à 1 modulo 25, il est congru à 1, 26, 51 ou 76 modulo 100. De toutes ces possibilités, seule la troisième est congrue à -1 modulo 8.

On en déduit donc

$$p \equiv 51 \pmod{100}$$

et les deux derniers chiffres du plus grand nombre premier connu à ce jour sont 5 et 1.

Tapis roulant

Question

On veut traverser le plus vite possible un long couloir, dont un tronçon est équipé d'un tapis roulant. Votre lacet est défait : vaut-il mieux le renouer sur le tapis roulant, hors du tapis roulant, ou est-ce sans importance ?

Réponse

L'argument vague « de toute façon, refaire le nœud prendra le même temps dans un cas comme dans l'autre, donc ça n'a pas d'importance » est fallacieux. Montrons-le d'abord par le calcul.

Appelons v_0 votre vitesse usuelle (hors du tapis), v_{tapis} la vitesse du tapis roulant, d_{tapis} la distance à parcourir sur le tapis, d_0 la distance à parcourir en dehors et t le temps nécessaire pour renouer votre lacet. Calculons le temps nécessaire à la traversée du couloir dans les deux cas.

Si vous décidez de lacer votre chaussure hors du tapis roulant, il vous faudra marcher pendant un temps égal à $\frac{d_0}{v_0}$ hors du tapis et $\frac{d_{\text{tapis}}}{v_0 + v_{\text{tapis}}}$ dessus, à quoi il faut ajouter le temps nécessaire pour refaire le nœud. Cela représente un temps total de

$$T_1 = \frac{d_0}{v_0} + \frac{d_{\text{tapis}}}{v_0 + v_{\text{tapis}}} + t.$$

Si vous décidez de lacer votre chaussure sur le tapis roulant, vous passerez moins de temps à marcher sur ledit tapis [1]. En effet, pendant le temps nécessaire à refaire le nœud, le tapis aura avancé de tv_{tapis}, et vous avec. La distance que vous parcourrez en marchant sur le tapis sera donc seulement de $d_{\text{tapis}} - tv_{\text{tapis}}$, et le temps total de parcours de

$$T_2 = \frac{d_0}{v_0} + \frac{d_{\text{tapis}} - tv_{\text{tapis}}}{v_0 + v_{\text{tapis}}} + t.$$

On voit donc bien que $T_1 > T_2$. Plus précisément,

$$T_1 - T_2 = \frac{v_{\text{tapis}}}{v_0 + v_{\text{tapis}}} t.$$

On voit donc que le gain est d'autant plus important que la vitesse du tapis est importante par rapport à la vôtre.

Il est en fait très facile de se convaincre de ce résultat par une petite expérience de pensée. Imaginez qu'Alice et Bob fassent simultanément les deux choix possibles (en supposant évidemment qu'ils marchent à la même vitesse et lacent leur chaussure avec la même célérité).

1. C'est la raison qui rend l'argument vague ci-dessus faux : votre choix est certes sans effet sur le temps passé à faire votre lacet, mais il a un effet sur la distance que vous allez parcourir à pied.

Pour fixer les idées, supposons que le tapis soit quelque part au milieu du couloir, qu'Alice refasse son nœud juste après être montée dessus, et Bob juste avant.

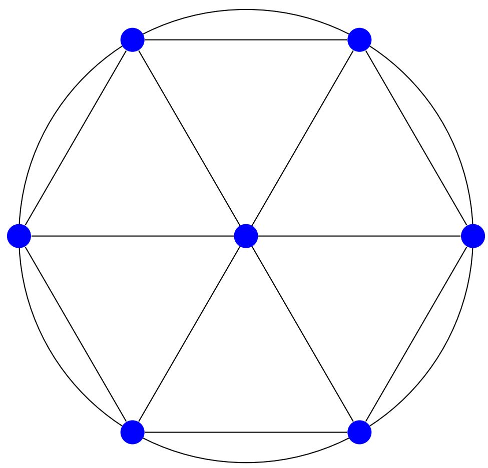
Avant le tapis, Alice et Bob sont parfaitement synchronisés. Ensuite, pendant que les deux nouent leur lacet, Alice avance d'une certaine distance, grâce au tapis. Ils finissent en même temps, et Alice est maintenant devant Bob. Comme ils marchent à la même vitesse, Bob ne peut évidemment pas rattraper Alice.

Remarque. Cette petite énigme provient du blog *What's new ?* du mathématicien australien Terence Tao (médaille Fields 2006).

Sept points

Question

Sept points sont placés dans un disque (y compris sur le bord), de telle sorte que la distance entre deux d'entre eux est toujours au moins égale au rayon du cercle. Montrer que l'un d'eux est au centre du cercle.



Réponse

Quitte à faire une homothétie globale, on peut supposer que le cercle est de rayon 1.

Commençons par remarquer que si O est le centre du cercle, deux points A et B (différents de O) tels que $\widehat{AOB} < 60°$ sont nécessairement à distance < 1.

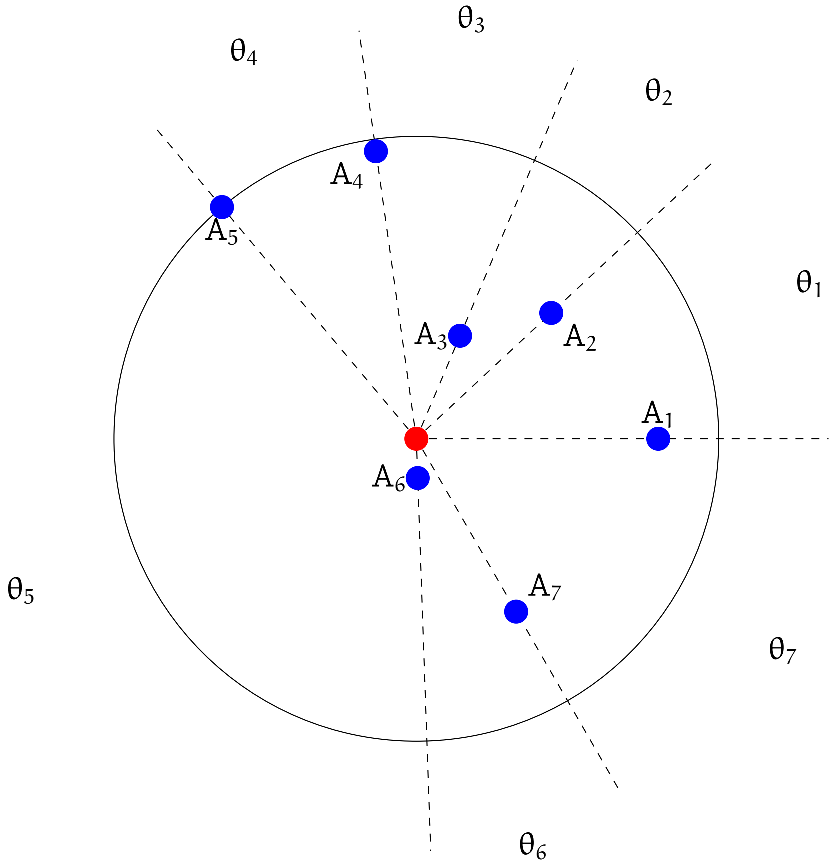
En effet,

$$\begin{aligned}
AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2\,OA\,OB\cos\left(\widehat{AOB}\right) && \text{d'après la relation d'Al-Kashi}\\
&< OA^2 + OB^2 - OA\,OB && \text{car } \widehat{AOB} < 60° \text{ entraîne } \cos\left(\widehat{AOB}\right) > 1/2\\
&\leqslant OA + OB - OA\,OB && \text{car } OA, OB \leqslant 1\\
&= 1 - (1 - OA)(1 - OB)\\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Cela permet de conclure : en effet, si les sept points étaient tous différents du centre du cercle, en les appelant $A_1, A_2, \ldots, A_7$ dans l'ordre trigonométrique, on obtiendrait sept angles

$$\theta_i = \widehat{A_iOA_{i+1}} \qquad (\text{avec } \theta_7 = \widehat{A_7OA_1})$$

dont la somme vaut $360°$.



Notons qu'il est impossible d'avoir deux points sur le même rayon, puisqu'ils seraient alors automatiquement à distance < 1. Nos angles θ_i sont donc strictement positifs (mais cela n'a à vrai dire pas d'impact sur la suite de la démonstration).

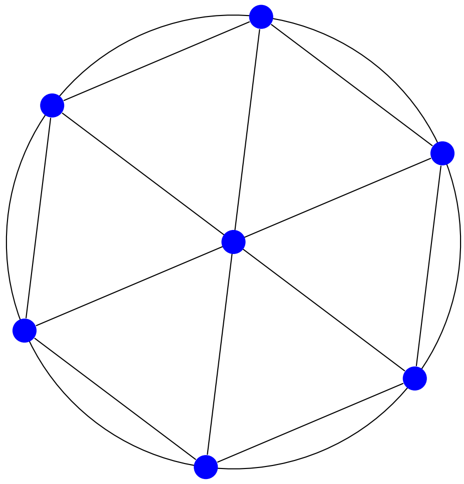
Puisque la somme de ces sept angles vaut $360°$, au moins l'un d'entre eux, appelons-le θ_i, vérifie

$$\theta_i \leqslant \frac{360°}{7} < 60°.$$

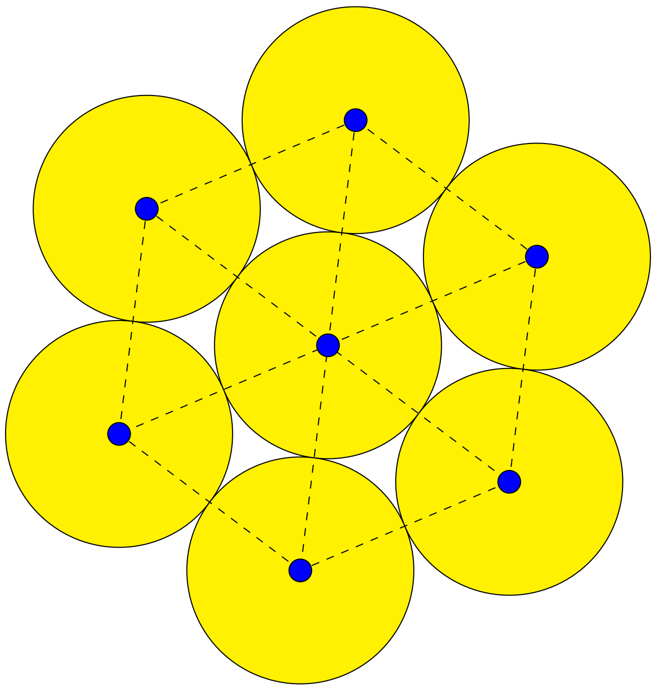
D'après ce qui précède, les points A_i et A_{i+1} correspondant (A_7 et A_1 si $i = 7$) sont donc à distance < 1, ce qui est une contradiction. On a donc bien montré que l'un des points était au centre du cercle.

Remarque

Même quand l'un des points du cercle est au centre (appelons-le O), les autres points $(A_1, \ldots, A_6)$ continuent à définir six angles dont la somme vaut $360°$. Si l'on suit alors le même raisonnement que pour répondre à la question, on voit alors que la condition que les points doivent être à distance au moins 1 implique que tous les $\widehat{A_iOA_{i+1}}$ valent $60°$ et que toutes les longueurs OA_i valent 1. En fait, la situation est alors, à une rotation près, la situation présentée dans l'énoncé.

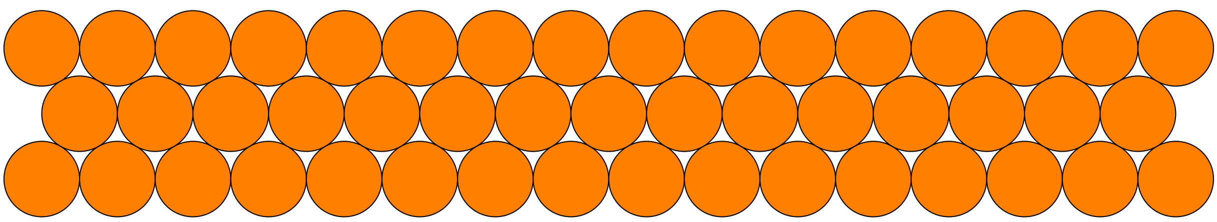


Une manière plus « physique » de présenter cette propriété est de tracer les disques de rayon $1/2$ centrés en chacun des points.



La propriété sur la distance minimale entre ces points revient maintenant à dire que les disques ne se chevauchent pas, et l'on vient de montrer que de toutes les manières d'empiler ainsi sept disques, l'empilement « naturel » (que l'on appelle empilement triangulaire ou hexagonal pour des raisons évidentes) est le seul à avoir la propriété que les sept centres soient dans un même disque de rayon 1.

En fait, quelle que soit la définition que l'on cherche à donner d'un empilement « optimal », l'empilement hexagonal est toujours l'unique réponse.



En revanche, les questions correspondantes en dimension supérieure sont beaucoup plus difficiles et forment en fait un sujet de recherche actif. Donnons deux exemples de résultats frappants.

– En dimension trois, il est impossible d'empiler des boules de même volume de façon plus dense que la façon « intuitive » (correspondant au *réseau cubique à faces centrées* de la cristallographie). C'est un résultat conjecturé par l'astronome Kepler au dix-septième siècle et démontrée par le mathématicien américain Thomas Hales en 1998. L'histoire de cette preuve et du rapport qu'elle entretient avec l'informatique est fascinante. On pourra en apprendre plus sur la page wikipédia consacrée à la conjecture de Kepler et en lisant l'introduction du livre (en anglais) de Hales consacré à sa deuxième preuve.
– La propriété que l'on a montrée dans ce document dit essentiellement que la seule façon pour qu'un disque touche six autres disques de même taille est celle donnée par le réseau hexagonal. Cette propriété de « rigidité » n'est pas vraie en dimension trois : la figure formée par une boule du réseau cubique à faces centrées et ses douze voisines est extrêmement flexible au sens où il y a beaucoup de manières de modifier cette configuration sans changer le fait que la boule centrale touche toutes les autres. En revanche, on connaît en dimension supérieure deux réseaux (Le réseau E_8 en dimension 8 et le réseau de Leech en dimension 24) possédant cette propriété de rigidité. On pourra consulter leurs pages wikipedia en anglais (ici pour E_8 et là pour le réseau de Leech) ou le blog de David Madore (E_8 et Leech) pour de brèves introductions à leurs merveilleuses propriétés.

Jeu de jetons

Question

On considère un paquet de jetons de trois couleurs (rouge, vert et bleu). On s'autorise à chaque coup à remplacer deux jetons de couleurs différentes par un jeton de la troisième couleur. Par exemple, voici une suite de transformations autorisées.

$$\color{red}\bullet\color{green}\bullet\bullet\bullet\color{blue}\bullet\bullet\bullet \color{black}\rightarrow \color{red}\bullet\bullet\bullet\color{green}\bullet\bullet\color{blue}\bullet\bullet \color{black}\rightarrow \color{red}\bullet\bullet\color{green}\bullet\color{blue}\bullet\bullet\bullet\bullet \color{black}\rightarrow \color{red}\bullet\bullet\bullet\bullet\color{blue}\bullet\bullet\bullet\color{black}.$$

En partant d'une situation avec 1515 jetons rouges, 1789 jetons verts et 2015 jetons bleus, est-il possible de parvenir à une situation où tous les jetons sont de la même couleur ?

Réponse

Non, c'est impossible.

Notons $n_{\color{red}\bullet}$, $n_{\color{green}\bullet}$ et $n_{\color{blue}\bullet}$ le nombre de jetons de ces trois couleurs. À chaque opération, ces nombres sont modifiés d'une des trois façons suivantes :

$\color{red}\bullet\color{green}\bullet \color{black}\rightarrow \color{blue}\bullet\bullet$ $\quad (n_{\color{red}\bullet}, n_{\color{green}\bullet}, n_{\color{blue}\bullet}) \rightarrow (n_{\color{red}\bullet} - 1, n_{\color{green}\bullet} - 1, n_{\color{blue}\bullet} + 2)$;

$\color{green}\bullet\color{blue}\bullet \color{black}\rightarrow \color{red}\bullet\bullet$ $\quad (n_{\color{red}\bullet}, n_{\color{green}\bullet}, n_{\color{blue}\bullet}) \rightarrow (n_{\color{red}\bullet} + 2, n_{\color{green}\bullet} - 1, n_{\color{blue}\bullet} - 1)$;

$\color{blue}\bullet\color{red}\bullet \color{black}\rightarrow \color{green}\bullet\bullet$ $\quad (n_{\color{red}\bullet}, n_{\color{green}\bullet}, n_{\color{blue}\bullet}) \rightarrow (n_{\color{red}\bullet} - 1, n_{\color{green}\bullet} + 2, n_{\color{blue}\bullet} - 1)$.

Rappelons que deux nombres entiers sont dits **congrus modulo** 3 si leur différence est un multiple de 3, c'est-à-dire si elles produisent le même reste (qui peut être 0, 1 ou 2) quand on pose leur division par 3.

L'intérêt de cette notion pour notre jeu est que si n est un nombre entier, $n - 1$ et $n + 2$ sont congrus modulo 3. Ainsi, en partant de trois nombres qui ne sont pas congrus deux à deux modulo 3 (comme dans notre exemple, puisque $1515 \equiv 0 \pmod 3$, $1789 \equiv 1 \pmod 3$ et $2015 \equiv 2 \pmod 3$), on ne pourra produire que des triplets de nombres possédant cette propriété. En particulier, on ne pourra jamais arriver à une situation où deux des nombres valent 0, c'est-à-dire à une situation incolore.

Table ronde

Question

n chevaliers s'asseyent autour d'une table ronde. Au bout d'un certain temps, quelqu'un remarque qu'ils se sont en fait assis selon leur âge : l'aîné à côté du deuxième plus vieux, lui-même à côté du troisième, et ainsi de suite jusqu'au cadet, qui est à côté de l'aîné.

Quelle était la probabilité que cela arrive ?

Réponse

Afin que la question ait un sens, supposons que $n \geqslant 2$.

Il y a en tout $n!$ façons pour les n chevaliers d'occuper les n places. Il s'agit simplement de compter les configurations dans lesquelles les chevaliers sont assis selon leur âge.

Dans toutes ces configurations, l'aîné des chevaliers A est assis à côté de leur cadet C. Réciproquement, une fois que l'on a choisi deux places côté à côte et que l'on y a placé A et C, il y a une seule façon de placer les $n-2$ chevaliers en respectant l'ordre. Or, il y a $2n$ façons de placer ainsi A et C (on peut par exemple choisir la place de A [n choix] puis asseoir C à l'une ou l'autre des places voisines [2 choix]).

Il y a donc $2n$ façons de placer les chevaliers selon leur âge, et la probabilité cherchée est

$$P = \frac{2n}{n!} = \frac{2}{(n-1)!}.$$

111...111

Question

Montrer que le nombre $R_n = \underbrace{111\dots111}_{n \text{ chiffres}}$ n'est pas un carré si $n > 1$.

Réponse

Commençons par une remarque sur les carrés.
– Si $m = 2k$, $m^2 = 4k^2$ est un multiple de 4 ;
– Si $m = 2k+1$, $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ est de la forme $4\ell + 1$.
Or, si $n \geqslant 2$, on a

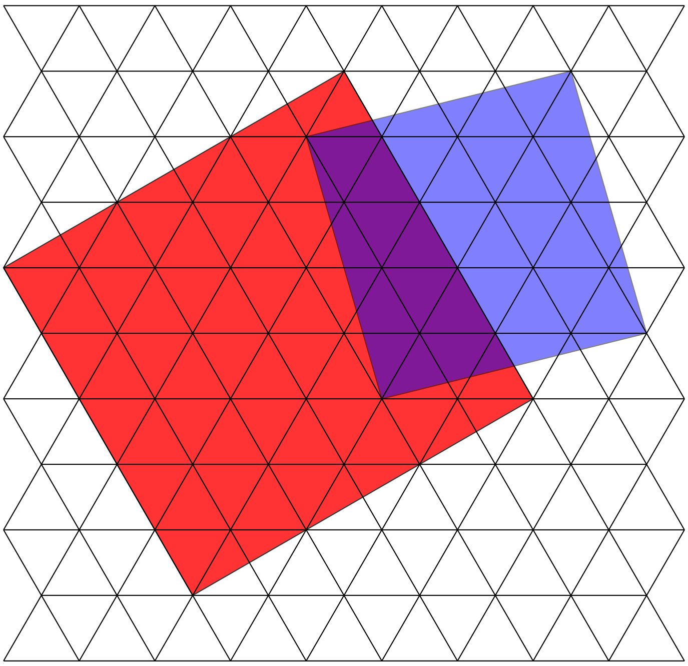
$$\begin{aligned} R_n = \underbrace{111\dots111}_{n-2 \text{ chiffres}}11 &= R_{n-2} \times 100 + 11 \\ &= R_{n-2} \times 4 \times 25 + 4 \times 2 + 3 \\ &= 4\,(25R_{n-2} + 2) + 3, \end{aligned}$$

et ce nombre n'est donc pas de la forme 4ℓ ou $4\ell + 1$ et ne peut en particulier pas être un carré.

Carrés et triangles

Question

On considère le pavage du plan par des triangles équilatéraux :



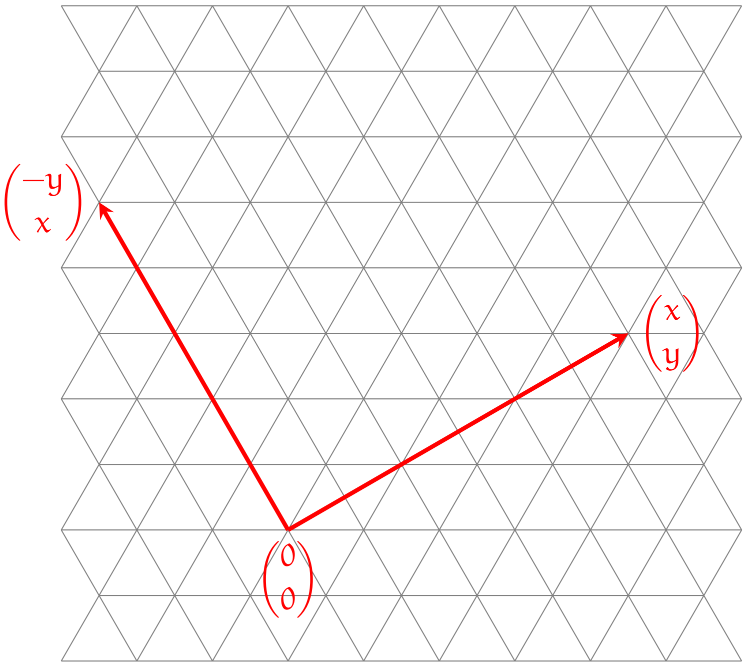
Parmi les sommets des triangles, est-il possible de trouver quatre points formant un carré ?

Réponse

Ça n'est pas possible. Introduisons des coordonnées dans lesquelles un des triangles a pour sommets $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$.

On remarque alors que les sommets des triangles ont pour abscisse des multiples de $1/2$ et pour ordonnée des multiples de $\sqrt{3}/2$.

Or, si quatre des sommets formaient un carré, on pourrait le décaler pour que l'un des sommets soient à l'origine du repère. En particulier, les deux sommets adjacents à $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ auraient pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$.



Le problème est que, d'après ce qui précède, x et y doivent être à la fois des multiples entiers de $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$: en particulier,

$$x = \frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{3}}{2}q, \qquad y = \frac{1}{2}p' = \frac{\sqrt{3}}{2}q',$$

pour deux entiers $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

Comme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$, x et y ne peuvent pas être tous les deux nuls. Supposons par simplicité que $x \neq 0$ (le cas $y \neq 0$ est similaire). On a donc

$$\frac{\sqrt{3}}{2}q = \frac{1}{2}p \quad \text{donc} \quad \frac{p}{q} = \sqrt{3},$$

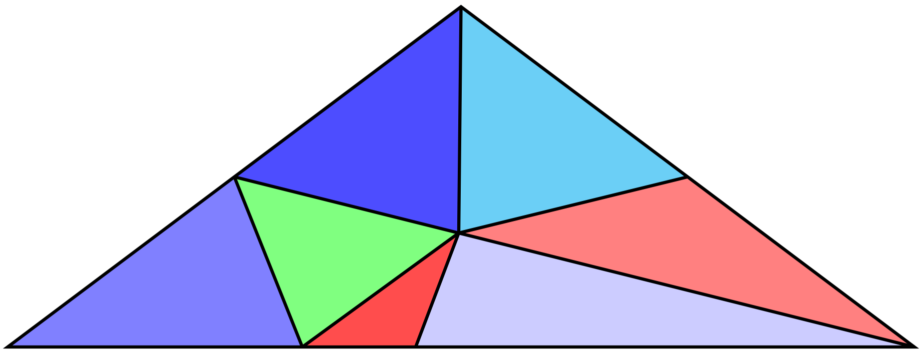
ce qui est impossible car $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Décomposition en triangles acutangles

Question

On rappelle qu'un triangle est dit *acutangle* si tous ses angles sont aigus, c'est-à-dire *strictement* inférieurs à $90°$.

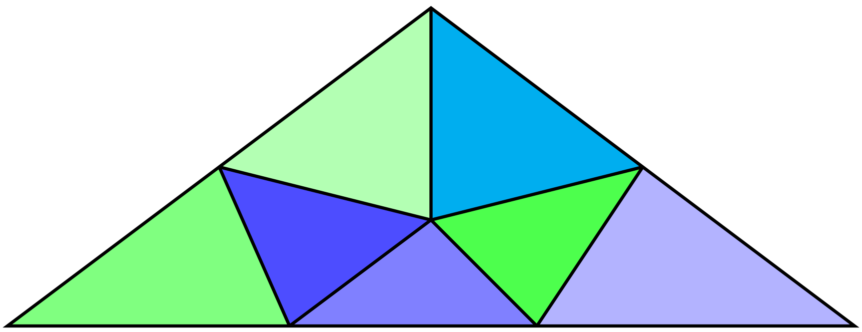
La figure suivante montre la décomposition d'un triangle non acutangle en sept triangles, dont cinq sont acutangles.



Est-il toujours possible de décomposer un triangle en triangles acutangles ? Si oui, quel est le nombre minimum de triangles dans la décomposition ?

Réponse

Évidemment, c'est toujours possible (avec un seul triangle) si le triangle est lui-même acutangle. Pour un triangle dont un angle est obtus ou droit, c'est également possible, et le nombre minimum de triangles utilisés dans la décomposition est sept.



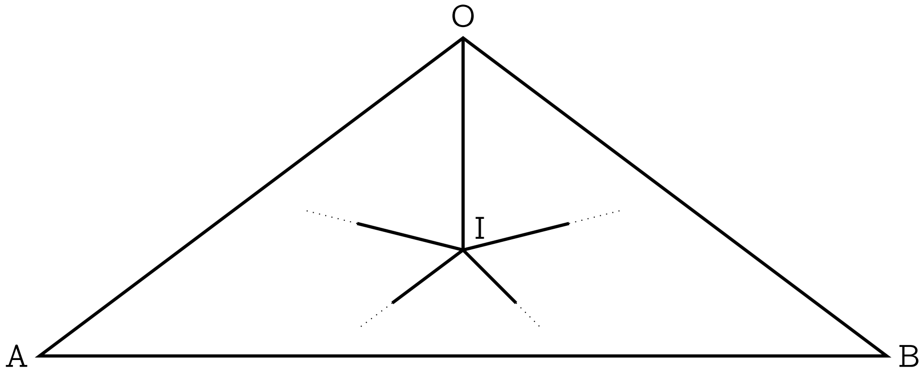
Une solution possible est exprimée par la figure précédente. Nous allons démontrer

– que sept est le nombre minimum de triangles dans une telle décomposition d'un triangle non acutangle ;
– qu'une solution de ce type est possible quel que soit le triangle non acutangle considéré.

Commençons par montrer qu'une solution avec moins de sept triangles n'est pas possible. Soit m le nombre minimal de triangles acutangles utilisés dans une décomposition d'un triangle OAB non acutangle (où O est l'angle droit ou obtus).

Puisque $\widehat{\mathrm{O}} \geqslant 90°$, au moins une des arêtes de la décomposition est issue de O. Il est impossible que cette arête se prolonge jusqu'au côté AB : en effet, si tel était le cas (et que l'on appelle D le point d'intersection de AB et de l'arête issue de O), au moins un des triangles AOD et BOD ne serait pas acutangle (en D). On aurait ainsi obtenu un triangle non acutangle décomposable en moins de m triangles, ce qui est absurde. Ainsi, on peut trouver dans notre décomposition un côté OI, où I est un point situé à l'intérieur de I.

Le point I est le sommet commun à $p \geqslant 5$ triangles de la décomposition. En effet, comme chacun de ces triangles a un angle en I strictement inférieur à $90°$ et que la somme de ces angles doit faire $360°$, $p \leqslant 4$ est exclu. Ces triangles forment donc un polygone à p côtés inscrit dans OAB, décomposé en p triangles.



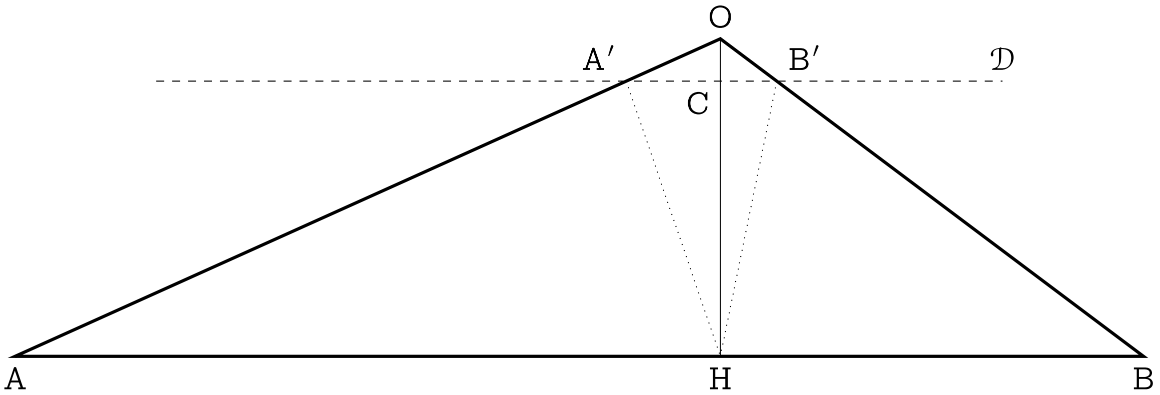
Puisqu'il faut ajouter au moins 2 triangles à un pentagone ou un hexagone pour former un triangle, on a soit $p \geqslant 7$, soit $m \geqslant p+2 \geqslant 7$ et notre décomposition a bien au moins sept triangles.

Démontrons maintenant que notre solution est correcte, quel que soit le triangle. La preuve que nous proposons est un peu compliquée [1], mais elle repose sur une idée assez simple : quand nous déplaçons un peu un point dans une construction géométrique, les grandeurs considérées (distances, angles...) varient peu. En particulier, dans la preuve qui va suivre, nous allons plusieurs fois appliquer cette idée : quand on a une configuration où certains angles sont aigus, il est possible de déplacer un peu certains des points de la figure en préservant cette propriété des angles. On peut ainsi espérer améliorer certains aspects de la configuration sans « casser » ce qui était déjà fait. Cette idée intervient deux fois dans la preuve suivante.

Soit H le pied de la hauteur issue de O. Puisque les angles $\widehat{\mathrm{A}}$ et $\widehat{\mathrm{B}}$ sont $< 90°$ (car $\widehat{\mathrm{O}} + \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} = 180°$), le point H appartient au segment [AB]. Les triangles AOH et BOH sont rectangles en H donc, en particulier, les angles $\widehat{\mathrm{AOH}}$ et $\widehat{\mathrm{BOH}}$ sont aigus.

Considérons maintenant une droite $\mathcal{D}$ parallèle à (AB) et située entre (AB) et O. Cette droite rencontre les segments A et B en deux points A' et B'. Plus $\mathcal{D}$ est située près de O, plus les angles $\widehat{\mathrm{AA'H}}$ et $\widehat{\mathrm{BB'H}}$ diminuent (à la limite, quand les points A' et B' tendent vers O, ces angles tendent vers les angles aigus $\widehat{\mathrm{AOH}}$ et $\widehat{\mathrm{BOH}}$). En particulier, on peut choisir une fois pour toute notre droite $\mathcal{D}$ telle que $\widehat{\mathrm{AA'H}}$ et $\widehat{\mathrm{BB'H}}$ soient aigus.

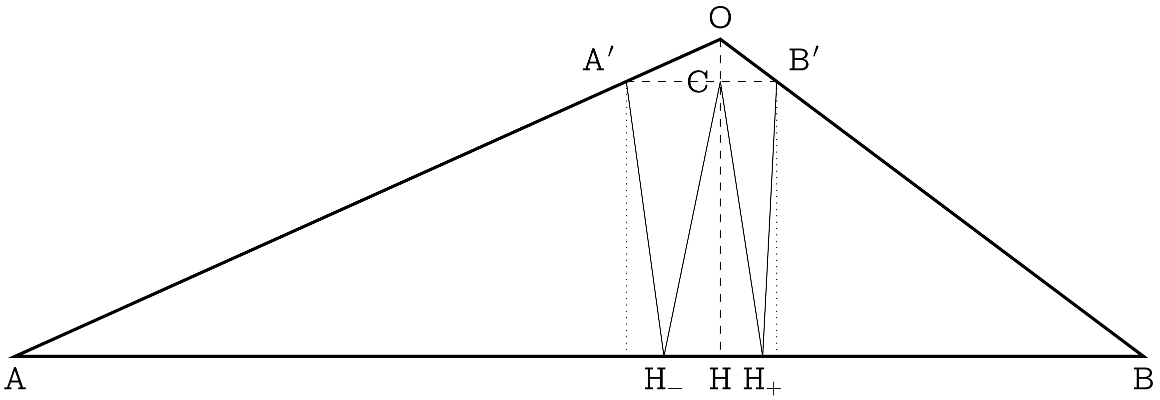
1. Il est fort possible qu'une construction plus simple nous ait échappé. Si vous trouvez une telle construction, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse `culturemath@dma.ens.fr`.



Soit maintenant C l'intersection des segments $[A'B']$ et $[OH]$.

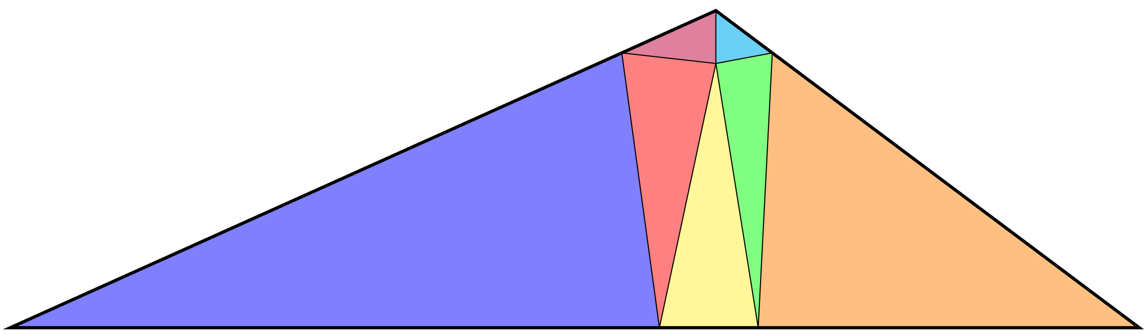
Si H_- est un point de (AB) compris entre H et le projeté orthogonal de A' sur (AB), les angles $\widehat{AA'H_-} \leqslant \widehat{AA'H}$ et $\widehat{AH_-A'}$ sont automatiquement aigus. Comme en outre l'angle $\widehat{H_-CH}$ s'approche de 0 au fur et à mesure que H_- se rapproche de H, on peut supposer $\widehat{H_-CH} < 45°$.

De même on peut construire H_+ (compris entre H et le projeté orthogonal de B' sur (AB)) de telle sorte que $\widehat{H_+CH} < 45°$. On vérifie alors (notamment à l'aide de la propriété des angles alternes-internes) que les cinq triangles AH_-A', BH_+B', H_-CH_+, $A'CH_-$ et $B'CH_+$ sont tous acutangles.



À ce stade, on a presque terminé : on a trouvé une décomposition de OAB en sept triangles dont cinq sont acutangles (AH_-A', BH_+B', H_-CH_+, $A'CH_-$ et $B'CH_+$) et deux rectangles ($A'OC$ et $B'OC$).

Si l'on remplace maintenant le point C par un point C' situé sur le segment $[CH]$, proche de C, on voit que les angles $\widehat{OCA'}$ et $\widehat{OCB'}$ deviennent aigus, alors que tous les autres angles d'un de nos sept triangles sont soit inchangés, soit modifés d'une petite quantité, d'autant plus petite que C' est proche de C. En particulier, on peut choisir C' de telle sorte que les sept triangles AH_-A', BH_+B', $H_-C'H_+$, $A'C'H_-$, $B'C'H_+$, $A'OC$ et $B'OC$ soient acutangles.



Un jeu polynomial

Question

Alice et Bob jouent à un jeu un peu étrange : tout d'abord, Alice choisit trois réels non nuls. Ensuite, Bob insère ces trois nombres réels, dans l'ordre qu'il souhaite, dans l'expression $\square X^2 + \square X + \square$. Il obtient ainsi un polynôme P de degré 2. Le jeu est alors terminé, et on dit qu'Alice gagne si le polynôme P a deux racines distinctes dans $\mathbb{Q}$, et que Bob gagne sinon.

Par exemple, si Alice choisit les réels 1, -1 et -1, Bob peut former le polynôme $X^2 - X - 1$, ce qui lui fait gagner la partie, car les racines de ce polynôme, $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sont distinctes, mais pas rationnelles.

La question est : lequel de ces deux joueurs possède une stratégie gagnante (autrement dit, lequel est sûr de gagner, si du moins il joue parfaitement) ?

Réponse

Il y a plusieurs façons de voir qu'**Alice a une stratégie gagnante**, plus ou moins élégantes. La plus simple est probablement la suivante : Alice peut choisir trois nombres rationnels p_1, p_2 et p_3 non nuls et distincts tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

En effet, puisque le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ vérifie $P(1) = a + b + c$, la stratégie d'Alice garantit que, quel que soit l'ordre dans lequel Bob insère les nombres p_1, p_2 et p_3 (et donc quel que soit le polynôme P qu'il construit ainsi), on aura $P(1) = p_1 + p_2 + p_3 = 0$, ce qui garantit déjà une solution rationnelle : le nombre 1.

Par ailleurs, le produit des racines du polynôme $aX^2 + bX + c$ vaut toujours[1] c/a. Comme P a déjà la racine 1, ce produit est égal à la deuxième racine : les racines de P sont 1 et c/a. Puisqu'Alice a choisi trois nombres rationnels distincts, on voit que c/a est bien un rationnel différent de 1, ce qui montre que, quel que soit le coup de Bob, la victoire d'Alice est assurée.

1. Un polynôme du second degré a un coefficient dominant $\lambda \neq 0$ et deux racines r_1 et r_2, éventuellement complexes ou confondues, et peut donc s'écrire

$$\lambda(X - r_1)(X - r_2) = \lambda(X^2 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2) = \lambda X^2 - \lambda(r_1 + r_2)X + \lambda r_1 r_2.$$

On voit donc directement que le produit des racines de $aX^2 + bX + c$ est c/a et que leur somme est $-b/a$.

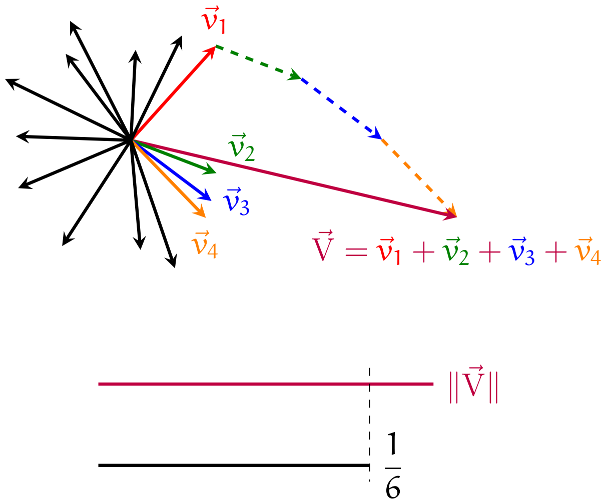
Somme de vecteurs

Question

On se donne n vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ du plan dont la somme des longueurs vaut 1. Montrer qu'il est possible de trouver une partie $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que la somme correspondante

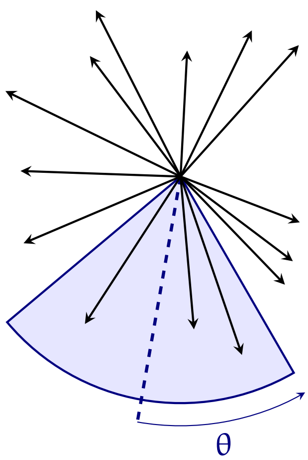
$$\sum_{i \in S} \vec{v}_i$$

ait une longueur au moins égale à $\dfrac{1}{6}$.

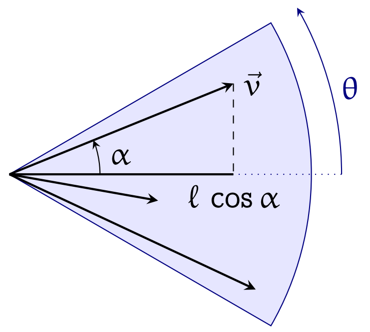


Réponse

Le problème est évidemment de réussir à choisir des vecteurs dont la somme présente peu de compensations, et qui pointent donc dans des directions proches. Nous allons choisir des vecteurs appartenant à un même secteur angulaire d'angle 2θ (pour $\theta < \pi/2$).



On peut alors facilement minorer la longueur de la somme $\vec{V}$ de ces vecteurs. En effet, si $\vec{v}$ est un vecteur de longueur ℓ dans un secteur d'angle 2θ, son projeté $p(\vec{v})$ sur la bissectrice du secteur a pour longueur $\ell \cos\alpha$, où α est l'angle indiqué sur la figure.



Comme $\alpha \leqslant \theta$ et que cos décroît sur $[0, \pi/2]$, le projeté $p(\vec{v})$ a donc une longueur

$$\|p(\vec{v})\| \geqslant \ell \cos(\theta).$$

Ainsi, si notre secteur contient r vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ de longueurs $\ell_1, \dots, \ell_r$, tous les projetés $p(\vec{v}_i)$ pointent dans la même direction et on a

$$\begin{aligned} \|p(\vec{v}_1) + \cdots + p(\vec{v}_r)\| &= \|p(\vec{v}_1)\| + \cdots + \|p(\vec{v}_r)\| \\ &= \ell_1 \cos\alpha_1 + \cdots + \ell_r \cos\alpha_r \\ &\geqslant \ell_1 \cos\theta + \cdots + \ell_r \cos\theta \\ &= (\ell_1 + \cdots + \ell_r) \cos\theta. \end{aligned}$$

Or, la somme des projetés $p(\vec{v}_1) + \cdots + p(\vec{v}_r)$ n'est rien d'autre que le projeté du vecteur $\vec{V} = \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_r$. Si elle est de longueur $\geqslant L \cos\theta$, c'est que le vecteur $\vec{V}$ lui-même vérifie :

$$\|\vec{V}\| \geqslant L \cos\theta,$$

où L est la somme des longueurs des vecteurs inclus dans notre secteur.

On a donc trouvé une manière de choisir des vecteurs de manière à pouvoir minorer leur longueur totale : on se trouve maintenant face à un problème d'optimisation. En effet, il va falloir choisir habilement notre secteur (et notamment son angle d'ouverture θ) de manière à obtenir $L \cos\theta$ aussi grand que possible. Évidemment, plus le secteur est grand, plus il contiendra de vecteurs (et donc plus L sera grand), mais plus le facteur « de perte » $\cos\theta$ sera petit.

Déjà, remarquons que la longueur totale de tous les vecteurs est de 1. Ainsi, un secteur d'angle 2θ contiendra « en moyenne » des vecteurs dont la somme des longueurs vaut

$$L_{\text{moy}} = \frac{2\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{\pi}.$$

En particulier, on peut trouver [1] un secteur d'angle 2θ tel que la somme des longueurs des vecteurs qu'il contient soit

$$L \geqslant \frac{\theta}{\pi}.$$

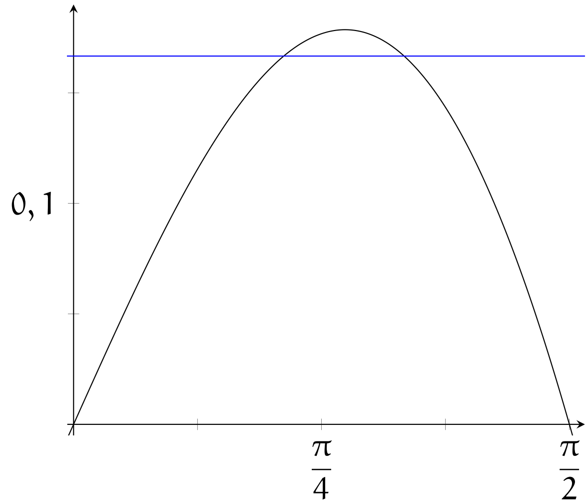
1. Si on veut être parfaitement rigoureux, on peut invoquer un argument de calcul intégral pour justifier cette affirmation. Ce n'est cependant pas strictement nécessaire, puisque, le nombre de vecteurs étant fini, il n'y a qu'un nombre fini de possiblités pour l'ensemble des vecteurs qu'un secteur d'angle θ peut contenir et donc pour la somme L des longueurs correspondantes. La « moyenne » θ/π sur laquelle on raisonne est alors une moyenne pondérée de ces valeurs de L et il faut bien qu'une de ces valeurs soit supérieure ou égale à θ/π.

Tout cela démontre que quel que soit $\theta \in [0, \pi]$, il nous est possible de trouver une partie $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ (qui sera simplement les indices des vecteurs contenus dans un « bon » secteur d'angle 2θ) telle que

$$\left\| \sum_{i \in S} \vec{v}_i \right\| \geqslant \frac{\theta}{\pi} \cos\theta.$$

On a alors répondu à la question, pour peu qu'on soit capable de montrer que la fonction $\dfrac{\theta\ \cos\theta}{\pi}$ atteigne sur $[0, \pi/2]$ au moins une valeur $\geqslant \dfrac{1}{\pi}$. On s'en convainc aisément par une étude numérique de la fonction (mais la valeur maximale, à peu près égale à $0,1786$, n'a pas d'expression simple) ou par tâtonnement. Par exemple, on obtient en $\theta = \pi/4$ la valeur

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} > \frac{1}{6}.$$



Graphe de $\theta \mapsto \dfrac{\theta\ \cos\theta}{\pi}$

Quelle que soit la manière rigoureuse dont on le formule, l'argument (qui peut paraître anodin) crucial que l'on utilise est très intuitif : dans une famille de nombres, il en existe au moins un qui est supérieur ou égal à la moyenne. Il s'agit simplement de la contraposée de l'affirmation (encore plus évidente) : la moyenne d'une famille de nombres est comprise entre ses valeurs extrêmes. Pour insignifiant que cet argument puisse paraître, il est en fait d'une grande portée. C'est notamment lui qui se cache derrière le célèbre principe des tiroirs. On pourra consulter (en anglais) cet article du grand informaticien Edsger W. Dijkstra pour une comparaison fort instructive entre ces deux principes.

Thé ou café ?

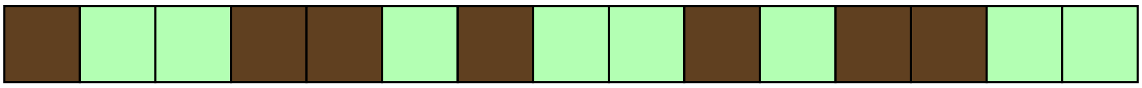
Question

Ana aime le hasard et déteste la monotonie. Tous les matins, elle tire à pile ou face sa boisson pour le petit déjeûner : thé ou café. Elle souhaite ainsi éviter de boire la même chose trois jours de suite. Au bout de n jours, quelle est la probabilité que sa règle de non-monotonie ait été respectée ?

Réponse

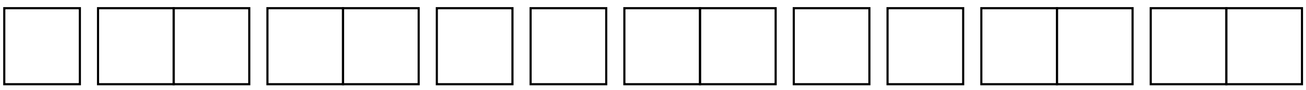
Au bout de n jours, il y a 2^n « historiques » possibles pour les petits déjeûner d'Ana. On doit se demander combien d'entre eux sont « favorables », c'est-à-dire ne présentent jamais la même boisson trois jours de suite.

Imaginons qu'Ana enregistre sur une (longue) file de carreaux ses boissons, en coloriant le n-ième carreau en vert si elle a bu du thé, en marron si c'était du café. Pour que l'historique soit favorable, il faut que son historique ressemble à



c'est-à-dire qu'il s'obtienne en posant à la suite des « carreaux » et ainsi que des « dominos » et , en alternant les couleurs.

Or, pour obtenir une telle frise, le choix des couleurs est en fait très limité : une fois que l'on a choisi la « forme » des pièces, par exemple



comme dans notre exemple, il n'y a que deux choix possibles de couleurs : on peut commencer par le vert ou le marron, puis la règle d'alternance force toutes les autres couleurs.

Autrement dit, le nombre d'historiques vérifiant la règle de non-monotonie est exactement le double du nombre F_n de manières de remplir un rectangle $1 \times n$ en utilisant des carreaux 1×1 et des dominos 1×2.

Or, cette définition combinatoire est une des définitions possibles[1] des nombres de Fibonacci[2] ! En effet, il est facile de voir que le nombre de tels remplissages vérifie la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$: pour remplir un rectangle de longueur $n+2$, on peut soit

1. On présente souvent cette définition comme : le nombre de Fibonacci est le nombre F_n de manières de monter n marches d'escalier en choisissant à chaque pas de sauter ou ne pas sauter une marche.

2. Noter que deux conventions existent pour la numérotation des nombres de Fibonacci : celle qui est adaptée à notre définition est celle pour laquelle $F_0 = F_1 = 1$.

commencer par un carreau (auquel cas il restera un rectangle de longueur $n+1$ à remplir, et donc F_{n+1} possibilités), soit par un domino (auquel cas il restera un rectangle de longueur n et donc F_n possibilités).

La probabilité qu'Ana échappe à la monotonie est donc de

$$P_n = \frac{2F_n}{2^n} = \frac{F_n}{2^{n-1}}.$$

Remarque : D'après la célèbre formule de Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

la probabilité que l'on vient de donner vaut à peu près $1,45 \times (0,8)^n$, et qu'elle tend donc très vite[3] vers 0.

3. Ana a plus de chances de gagner au Loto quatre fois de suite que d'échapper à la monotonie pendant un an.

Le jeu des pièces

Question

Alice et Bob jouent à un jeu : 38 pièces, de diverses valeurs, sont alignées sur une table en face d'eux. Alice choisit une des deux pièces qui occupent une extrémité de la rangée et l'empoche. Bob fait de même, et ainsi de suite jusqu'à ce que Bob empoche la trente-huitième pièce. Montrer qu'Alice peut être sure d'empocher au moins autant d'argent que Bob.

Réponse

Numérotons les pièces de 1 à 38, dans l'ordre de la rangée. Remarquons que si elle le désire, Alice peut s'attribuer toutes les pièces de numéro impair (et donc laisser celles de numéro pair à Bob). Pour cela, il lui suffit simplement de prendre la pièce numéro 1 et, après chaque coup de Bob, de chosir sa pièce du même côté que lui. De façon symétrique (en commençant par la pièce numéro 38), elle peut également choisir de s'attribuer toutes les pièces de numéro pair.

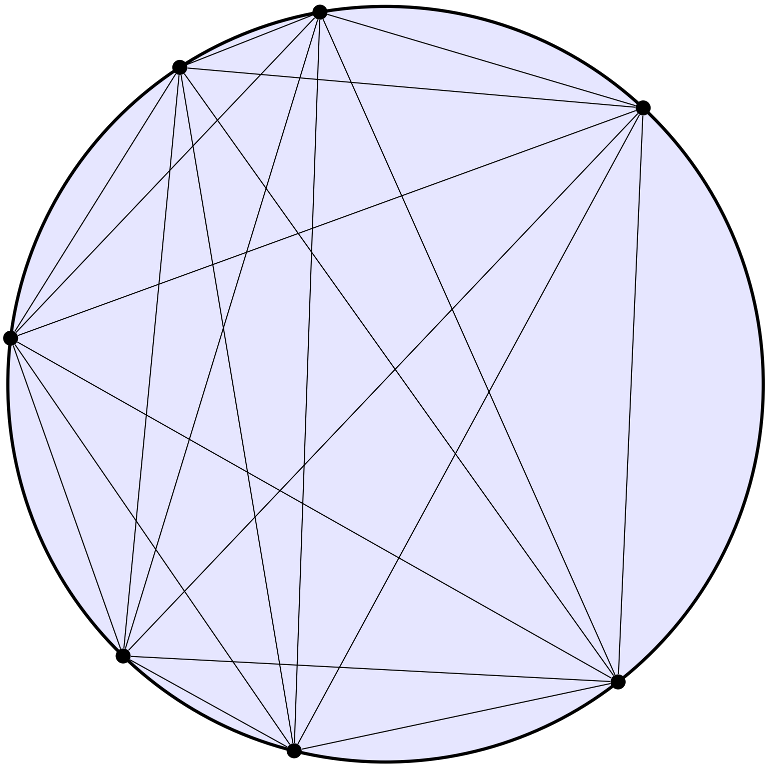
Ainsi, Alice peut s'attribuer toutes les pièces de numéro pair ou impair, suivant ce qui est le plus avantageux. En suivant cette stratégie, elle est sure d'empocher au moins autant d'argent que Bob.

Intersection de cordes

Question

On place n points sur un cercle et l'on trace toutes les cordes reliant ces deux points. On suppose en outre que les cordes sont *en position générale*, c'est-à-dire que trois cordes ne sont jamais concourantes.

Combien de points d'intersection y aura-t-il à l'intérieur du disque ?

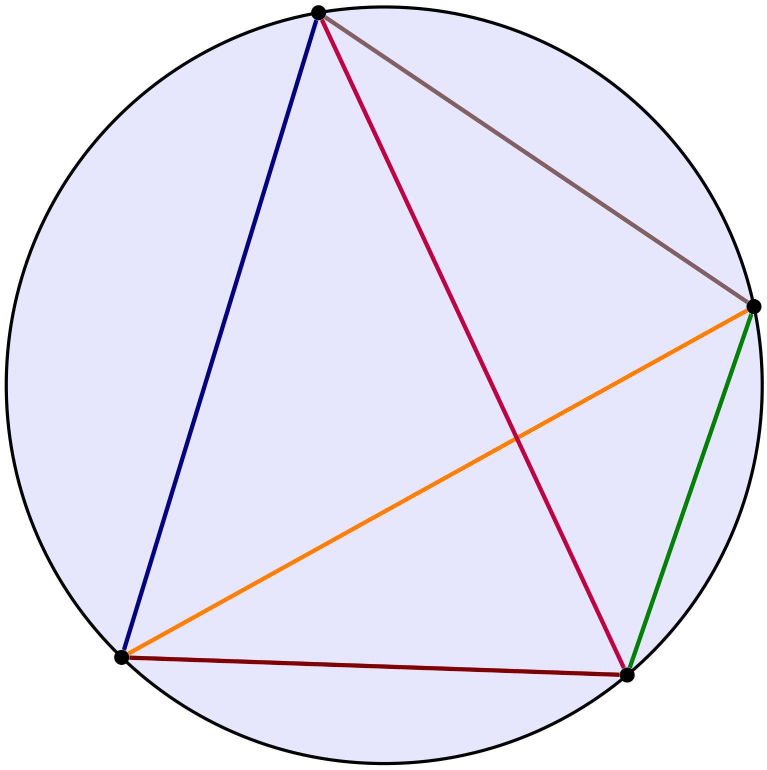


Réponse

La réponse est étonnament simple, si on effectue le dénombrement habilement.

Chaque point d'intersection met en jeu quatre points sur le cercle : les extrémités des deux cordes qui s'intersectent (les deux cordes ne peuvent pas partager une extrémité puisque leur intersection se trouve à l'intérieur du disque). Puisque trois cordes ne sont jamais concourantes, ces quatre points sont bien définis, sans ambigüité.

Réciproquement, étant donné quatre points sur un cercle, les six cordes ainsi formées dessinent un quadrilatère convexe et ses deux diagonales. Parmi ces six cordes, seulement deux s'intersectent à l'intérieur du disque : les deux diagonales.

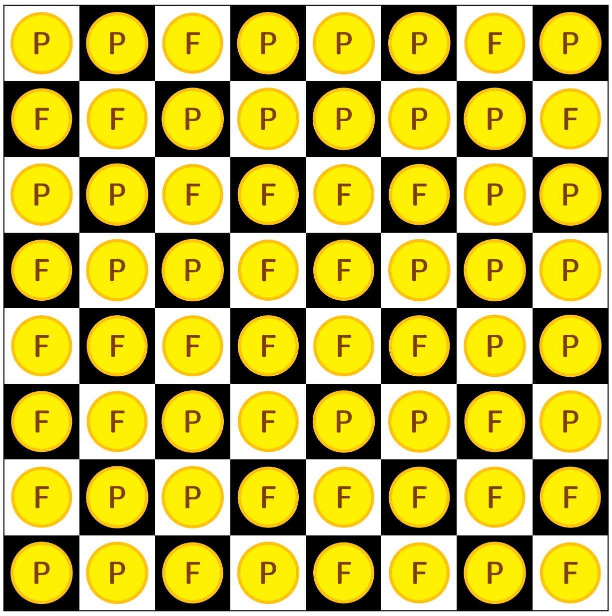


Ainsi, il y a exactement autant de points d'intersection à l'intérieur du disque que d'ensembles de quatre points choisis parmi les n que nous avons placés, c'est-à-dire $\binom{n}{4}$.

Pièces et échiquier

Question

Alice et Bob ont été capturés par Ève. Celle-ci leur propose de jouer pour leur libération. Ève va placer sur un échiquier 64 pièces de monnaie. Il y aura ainsi une pièce sur chaque case, soit sur « pile », soit sur « face ». Elle fera ensuite venir Alice, lui montrera l'échiquier, et lui désignera une des cases. Alice devra retourner une des pièces. Ève fera alors sortir Alice et entrer Bob, qui devra, en regardant l'échiquier, trouver quelle case a été désignée par Ève.



Avant le jeu, Alice et Bob ont tout le temps de mettre au point une stratégie commune, mais une fois que le jeu commence, ils ne pourront plus communiquer : la seule information transmise par Alice à Bob le sera par l'intermédiaire de l'échiquier.

Pouvez-vous trouver une stratégie qui permette à Alice et Bob d'être sûrs de gagner ?

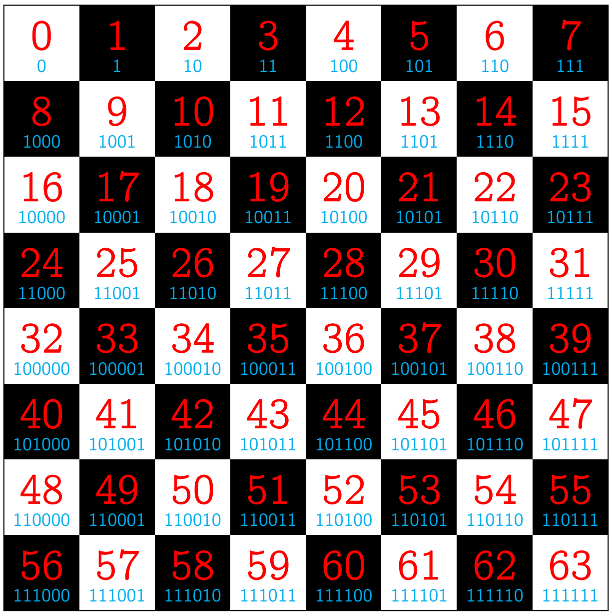
Réponse

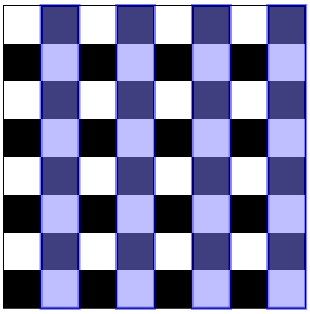
On remarque déjà qu'Alice a 64 choix d'actions, puisqu'elle doit retourner exactement une des pièces. D'un autre côté, le message qu'elle veut envoyer à Bob (la case qui a été désignée par Ève) existe également en 64 versions. Il lui faut donc trouver un moyen d'exploiter pleinement son action.

Une manière de faire est d'utiliser la numérotation binaire. Les nombres de 0 à 63 s'écrivent en binaire avec six bits (de $0 = \overline{0}$ à $63 = \overline{111111}$).

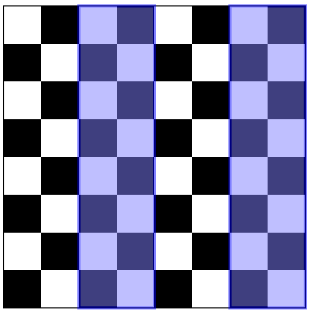
En particulier, si on numérote de 0 à 63 les cases de l'échiquier, on possède 6 groupes de 32 cases, du type

$$E_i = \{\text{case numéro } n \,|\, \text{le } i\text{-ème bit de } n \text{ est un } 1\}.$$

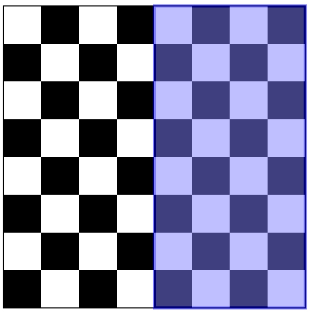




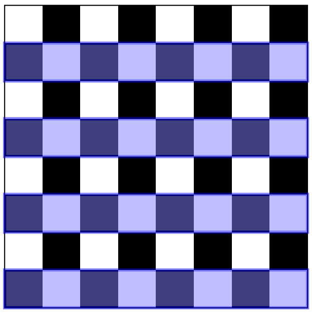
E_0



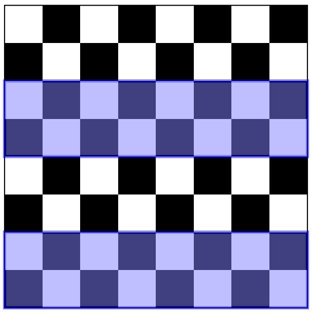
E_1



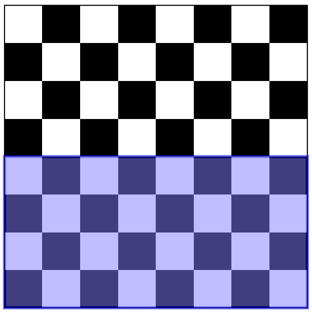
E_2



E_3



E_4



E_5

Par construction, cette famille $(E_i)_{i=0}^{5}$ a la propriété remarquable[1] que quel que soit l'ensemble $I \subseteq \{0, 1, \ldots, 5\}$, il existe une unique case sur l'échiquier appartenant aux E_i pour $i \in I$ et n'appartenant pas aux E_j pour $j \notin I$. En effet, si l'on cherche la case appartenant à E_2, E_3 et E_5 et à aucun autre E_i, par exemple, il s'agit nécessairement de la case dont le numéro possède un 1 aux bits numéro 2, 3 et 5 et un 0 aux autres bits, c'est-à-dire à la case numéro $\overline{101100} = 44$.

Ces ensembles permettent d'associer à chaque configuration de pièces sur l'échiquier un nombre entre 0 et 63 que l'on appellera son *résultat* (et donc une case de l'échiquier). Pour

1. En fait, cette propriété est essentiellement équivalente au fait que si on regarde l'univers $\Omega = \{0, 1, \ldots, 63\}$ muni de la probabilité uniforme, les ensembles $E_0, \ldots, E_5$ sont des événements de probabilité $1/2$ deux à deux indépendants. N'importe quelle famille (E_i) vérifiant ces propriétés permettrait d'ailleurs à Alice et Bob d'appliquer leur stratégie.

chaque $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, on compte le nombre de « face » dans E_i, si celui-ci est pair, on pose $b_i = 0$; dans le cas contraire, $b_i = 1$. Le résultat de l'échiquier est alors le nombre dont la décomposition en base 2 est $\overline{b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0}$, c'est-à-dire $R = \sum_{i=0}^{5} b_i 2^i$.

Par exemple, dans le cas de l'échiquier de l'énoncé, il y a :

— 15 « face » dans E_0, donc $b_0 = 1$;

— 15 « face » dans E_1, donc $b_1 = 1$;

— 15 « face » dans E_2, donc $b_2 = 1$;

— 14 « face » dans E_3, donc $b_3 = 0$;

— 17 « face » dans E_4, donc $b_4 = 1$;

— 20 « face » dans E_5, donc $b_5 = 0$;

ainsi, $R = \overline{010111} = 23$.

La stratégie d'Alice va donc être de retourner une pièce de telle sorte que le résultat de la nouvelle configuration soit le numéro de la case désignée par Ève. Bob n'aura plus donc qu'à calculer le résultat et montrer (fièrement) la case correspondante, leur assurant la liberté.

Pour vérifier que cette stratégie fonctionne, il faut donc s'assurer qu'Alice peut, en retournant une pièce, faire apparaître n'importe quel résultat, et ce quelle que soit la configuration initiale.

C'est en fait étonnamment facile : pour chacun des E_i, il y a deux possibilités. Soit le nombre de « face » est déjà de la bonne parité (c'est-à-dire que le b_i correspondant est bien le i-ème bit du nombre qu'Alice souhaite obtenir), soit il ne l'est pas. Notons I l'ensemble des i tels que b_i ne soit pas le bon. D'après la propriété cruciale des (E_i), il existe une unique case appartenant à tous les E_i pour $i \in I$ et à aucun autre. Si Alice retourne cette case, elle change le nombre de « face » appartenant à ces E_i d'une unité, et elle change donc les b_i correspondant. En revanche, comme la pièce qu'elle retourne n'appartient pas aux E_j, $j \notin I$, les b_j « déjà corrects » restent inchangés. Alice peut donc obtenir n'importe quel résultat, et elle peut donc envoyer le bon message à Bob.

Par exemple, dans la situation de l'énoncé, si Ève avait désigné la case $18 = \overline{01010}$, Alice veut changer les valeurs de b_0 et b_2, donc il lui faut retourner la case $\overline{000101} = 5$. Pour donner[2] un autre exemple, dans le cas où la configuration donnée par Ève fournit déjà le bon résultat, Alice doit retourner la pièce située sur la case 0.

2. En fait, si le résultat de la configuration initiale est R_0 et que le résultat voulu est R_1, Alice doit retourner la case de numéro $R_0 \oplus R_1$, où $\oplus$ désigne le ou exclusif bit à bit. Mais cela n'est qu'une manière légèrement plus savante de dire la même chose.

Multiples de 164

Question

Combien de nombres à 6 chiffres sont multiples de 164 et se terminent par 164 ?

Remarque : cette question est extraite du *Calendrier mathématique 2016* (question du 25 février).

Réponse

Un nombre à 6 chiffres se terminant par 164 est un nombre de la forme $1\,000 \times n + 164$, où n est un entier compris entre 100 et 999.

Par ailleurs, la décomposition de 164 en facteurs premiers est (de manière appropriée pour la quarante-et-unième question du jeudi)

$$164 = 2^2 \times 41 = 4 \times 41.$$

Déjà, notre nombre est toujours divisible par 4 : on peut remarquer que $1\,000 \times n + 164 = 4 \times (250 \times n + 41)$ ou bien se souvenir du critère de divisibilité par 4 (un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé de ses deux derniers chiffres l'est). En particulier, $1\,000 \times n + 164$ est divisible par 164 si et seulement si $250 \times n + 41$ est divisible par 41 (ce qui est équivalent au fait que 41 divise $250 \times n$).

Puisque 41 est un nombre premier ne divisant pas 250, le lemme d'Euclide s'applique et 41 divise $250 \times n$ si et seulement s'il divise n.

Ainsi, les nombres recherchés sont exactement les nombres de la forme $1\,000n + 164$, où n est un multiple de 41 compris entre 100 et 999. Les n qui conviennent sont donc

$$3 \times 41 = 123, 4 \times 41 = 164, \ldots, 23 \times 41 = 943, 24 \times 41 = 984,$$

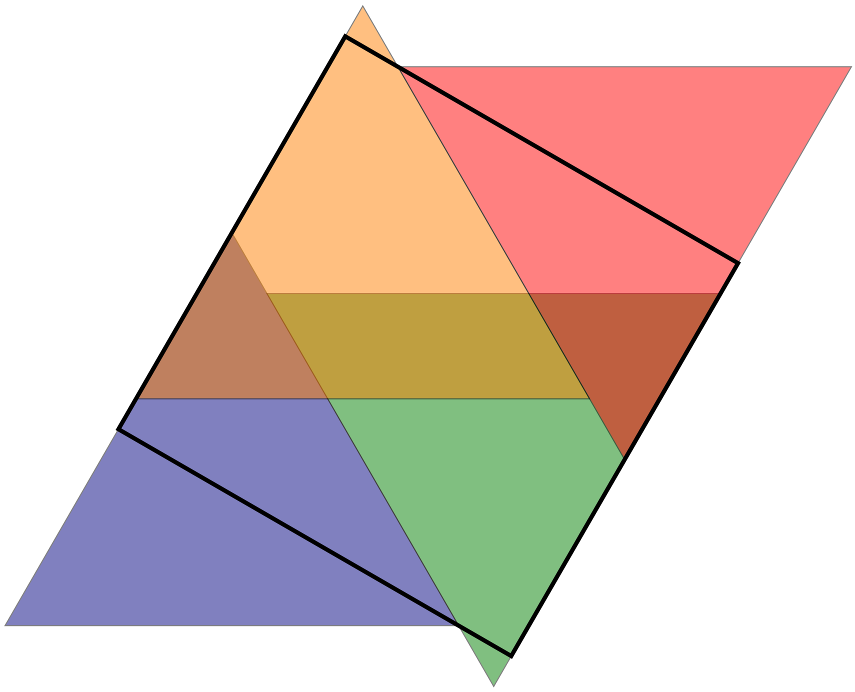
qui sont au nombre de 22.

Il y a donc 22 nombres à six chiffres se terminant par 164 qui sont multiples de 164.

Un carré, trois triangles

Question

On voit facilement qu'il est possible de recouvrir un carré par quatre triangles équilatéraux de même côté.

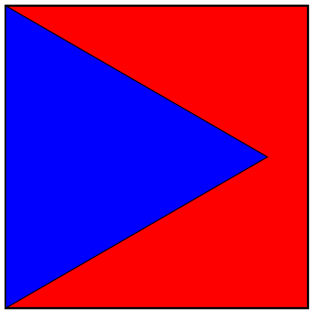


Est-il possible de n'en utiliser que trois ?

Réponse

On se convainc très vite que la réponse est **non**. Démontrons-le. Choisissons la longueur des côtés de notre carré et nos triangles comme unité de longueur.

On peut arriver rapidement à une démonstration en considérant les sommets du carré. Puisqu'il y a quatre sommets et trois triangles, il est nécessaire qu'un des triangles recouvre deux des sommets du triangle. Cela entraîne qu'un de ses côtés coïncide avec l'un des côtés du carré. Appelons $[\mathrm{AB}]$ ce côté.



On peut alors trouver des points non couverts par le triangle aussi proches qu'on le souhaite de A. Cela entraîne qu'un des autres triangles doit également couvrir A. Puisque la situation est symétrique, on peut en dire autant de B. Ainsi, les trois triangles que l'on considère doivent tous les trois couvrir A ou B.

Cependant, la distance entre A (ou B) et le milieu du côté opposé à AB vaut $\sqrt{5}/2 > 1$ en vertu du théorème de Pythagore. En particulier, aucun de nos triangles ne peut couvrir ce point, ce qui achève la preuve.

Subprime Fibs

Question

Le mathématicien anglais J.H. Conway a inventé une variante de la suite de Fibonacci, qu'il appelle *Subprime Fibs*. Partons de deux nombres strictement positifs. Ensuite, on complète la suite petit à petit suivant la règle suivante. Formons la somme des deux derniers termes de la suite : si le résultat est premier, reportons-le tel quel ; s'il ne l'est pas, divisons-le par son plus petit facteur premier et reportons le résultat.

Ainsi, en partant comme dans la suite de Fibonacci des nombres 1 et 1, on obtient successivement $2 = 1 + 1$ (qui est bien premier), $3 = 2 + 1$, $5 = 2 + 3$ (idem), puis $4 = \frac{5+3}{2}$, $3 = \frac{5+4}{3}$, etc. Les premiers termes de la suite sont les suivants :

$$\begin{array}{l} 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 7,\ 5,\ 6,\ 11,\ 17,\ 14,\ 31,\ 15,\ 23,\ 19,\ 21,\ 20,\ 41, \\ 61,\ 51,\ 56,\ 107,\ 163,\ 135,\ 149,\ 142,\ 97,\ 239,\ 168,\ 37,\ 41,\ 39,\ 40,\ 79,\ 17,\ \color{red}{48},\ \color{red}{13},\ \color{red}{61} \\ \color{red}{37},\ \color{red}{49},\ \color{red}{43},\ \color{red}{46},\ \color{red}{89},\ \color{red}{45},\ \color{red}{67},\ \color{red}{56},\ \color{red}{41},\ \color{red}{97},\ \color{red}{69},\ \color{red}{83},\ \color{red}{76},\ \color{red}{53},\ \color{red}{43},\ 48,\ 13,\ 61,\ 37,\ 49, \\ 43,\ 46,\ 89,\ 45,\ 67,\ 56,\ 41,\ 97,\ 69,\ 83,\ 76,\ 53,\ 43,\ 48,\ 13,\ 61,\ 37\ \ldots \end{array}$$

où le cycle de 18 nombres en rouge se répète infiniment.

Conway conjecture que quels que soient les deux nombres de départ, la suite finira soit par devenir constante, soit par entrer dans l'un des six cycles qu'il a identifés (en plus de notre cycle de longueur 18, il y en a de longueur 10, 11, 19, 56 et 136).

L'objectif de cette question est plus modeste : montrer qu'il n'existe pas de cycles de longueur 2 ou 3.

Réponse

1. S'il y avait un cycle d'ordre 2, c'est-à-dire si l'on pouvait trouver une suite $a, b, a, b, \ldots$ obéissant aux règles *Subprime Fibs*, on devrait obtenir a en considérant la somme $a+b$ et, le cas échéant, en la divisant par son petit facteur premier. De même, on devrait obtenir a en appliquant le même procédé à la somme $b + a$. Comme $a + b = b + a$, ces deux calculs donneraient évidemment le même résultat, ce qui contredit l'hypothèse $a \neq b$.
2. Le raisonnement est un peu plus compliqué pour le cas d'un cycle de longueur 3. Supposons donc qu'une suite $a, b, c, a, b, c, \ldots$ obéisse aux règles *Subprime Fibs*, avec a, b et c non confondus. Tirons-en petit à petit des conclusions :
   — Déjà, les trois nombres sont tous différents. En effet, si deux d'entre eux étaient les mêmes (disons x), il serait possible de les trouver côte à côte dans la suite, et comme $x + x$ est pair, la suite vaudrait alors à partir de ce moment

$$x, x, \frac{x+x}{2} = x, \frac{x+x}{2} = x, \ldots$$

ce qui contredit le fait que le cycle est de longueur 3. Sans perte de généralité, on peut supposer que a est strictement plus grand que les deux autres.

— En particulier, $b < a + c$ et $c < a + b$. Pour obtenir b (resp. c), il a donc fallu diviser la somme $a + c$ (resp. $a + b$) par son plus petit facteur premier p (resp. q). En particulier, on a

$$b = \frac{a+c}{p} \qquad \text{et} \qquad c = \frac{a+b}{q}.$$

— Inversement, si ℓ est un nombre premier, on a $\dfrac{b+c}{\ell} \leqslant \dfrac{b+c}{2} \leqslant \max(b,c) < a$. Donc on n'a pas pu diviser $b + c$ par un nombre premier pour obtenir a. C'est donc que $a = b + c$ et que a est lui-même premier. Puisqu'il ne peut pas valoir 2 (cela entraînerait $b = c = 1$, alors qu'on a vu que les trois nombres doivent être différents), il s'agit d'un premier impair. En remplaçant a par $b+c$ dans les formules données plus haut pour b et c, on obtient par ailleurs

$$(p-1)b = 2c \qquad \text{et} \qquad (q-1)c = 2b.$$

— Puisque $a = b + c$ est impair, b et c n'ont pas la même parité. Supposons dans un premier temps que b est pair. Cela entraîne que $pb = a + c$ est pair : son plus petit facteur premier était donc $p = 2$. Ainsi, l'équation précédente devient $b = 2c$, d'où l'on déduit $a = 3c$. Comme a est premier, $c = 1$ et le cycle doit donc être

$$3, 2, 1, 3, 2, 1, \ldots$$

Or, cela est absurde : après 3 et 2, la règle *Subprime Fibs* implique que l'on doit écrire 5, qui est premier. On est donc arrivé à une contradiction.
Si en revanche, si c'est c qui est pair, le même raisonnement montre essentiellement que $c = 2b$ et $a = 3c$. Le cycle est alors

$$3, 1, 2, 3, 1, 2, \ldots$$

ce qui entraîne la même contradiction.

On a donc bien montré qu'il n'y avait aucun cycle de longueur 3.

Remarque. Pour démontrer la conjecture de Conway (comme pour la conjecture de Syracuse, avec qui elle partage un certain nombre de caractéristiques), il faudrait pouvoir démontrer deux résultats :

— Que quels que soient les nombres de départ, la suite reste bornée. En particulier, cela entraînerait que toute suite finit par rentrer dans un cycle.

— Qu'il n'y a pas de cycle autre que ceux que l'on a identifiés (les six cycles de longueur 10, 11, 18, 19, 56, 136 et les cycles triviaux où le même nombre se répète à l'infini).

D'une certaine façon, la question que nous venons de résoudre est un (tout petit) pas en direction de ce deuxième point. Richard Guy, Tanya Khovanova et Julian Salazar ont en fait démontré qu'ils n'y avait aucun cycle (non trivial) de longueur $\leqslant 9$, et qu'il n'y avait qu'un cycle de longueur 10.

Pour des renseignements supplémentaires sur des questions connexes concernant la conjecture de Syracuse, nous recommandons chaudement l'excellente série d'articles de Shahom Eliahou sur le site *Images des Mathématiques* :

— Le problème $3n + 1$: élémentaire mais redoutable

— Le problème $3n + 1$: cycles de longueur 5

— Le problème $3n + 1$: y a-t-il des cycles non triviaux ?

Heure d'arrivée estimée

Question

Un véhicule parcourt une route de 100 kilomètres. Son GPS estime le temps restant à parcourir en supposant que la vitesse moyenne sur le trajet restant sera égale à la vitesse moyenne depuis le départ. Au bout de 40 minutes, le GPS indique qu'il reste une heure de trajet. Est-il possible que le GPS donne la même indication pendant les cinq heures suivantes ? Si oui, combien de kilomètres resteront-ils à parcourir au bout de ces cinq heures ?

Réponse

En indiquant les temps en heures et les distances en kilomètres, on peut paramétrer la route par un nombre x variant entre 0 et 100 et la position du véhicule par une fonction $x(t) \in [0, 100]$. Les conditions de l'énoncé deviennent alors, pour tout $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 5 + \frac{2}{3}$,

$$\frac{\text{distance à parcourir}}{\text{temps estimé}} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} \iff \frac{100 - x(t)}{1} = \frac{x(t)}{t}$$

$$\iff \left(1 + \frac{1}{t}\right) x(t) = 100$$

$$\iff x(t) = 100 \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-1},$$

ce qui est tout à fait possible (on remarque d'ailleurs que $x(t)$ est une fonction croissante de t, ce qui assure que le véhicule roule toujours dans le bon sens).

Au bout de ces cinq heures, le véhicule aura donc parcouru

$$100 \left(1 + \frac{1}{5 + \frac{2}{3}}\right)^{-1} = 100 \left(1 + \frac{3}{17}\right)^{-1} = 100 \times \frac{17}{20} = 85\,\text{km}.$$

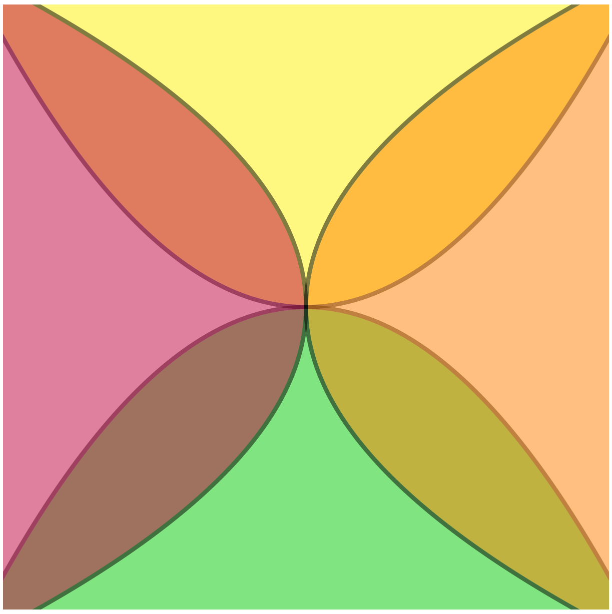
Paraboles

Question

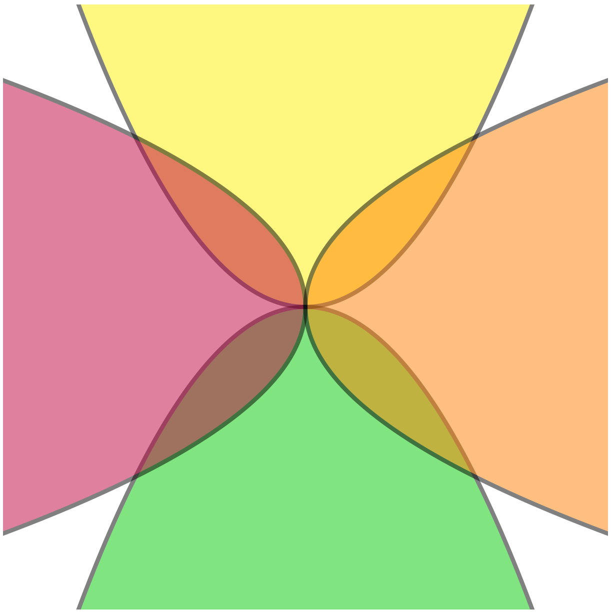
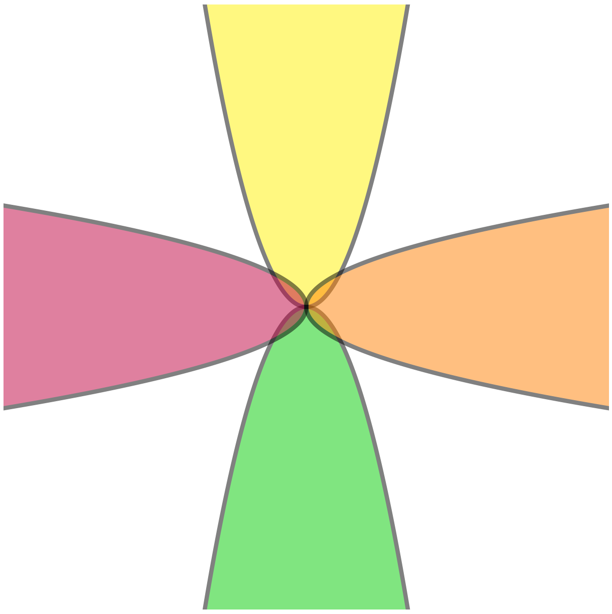
Montrer que l'on ne peut pas recouvrir le plan par un nombre fini d'intérieurs de paraboles.

Réponse

À première vue, le résultat peut paraître surprenant. En effet, on imagine assez bien quatre paraboles recouvrir le plan.



Mais cette image est un leurre, comme on peut s'en apercevoir en dézoomant l'image deux fois, puis dix fois.

Cette dernière image nous donne d'ailleurs la clef du problème : vue de très loin, une parabole a l'air concentrée autour de son axe. C'est ce que nous allons utiliser pour donner une démonstration rigoureuse.

Lemme. L'intersection entre l'intérieur d'une parabole et une droite qui n'est pas parallèle à son axe est bornée.

Preuve. Par symétrie, il suffit de montrer ce résultat pour une parabole bien choisie, par exemple le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$. Dans ce cas, l'axe de la parabole est l'axe des ordonnées et une droite non parallèle à celui-ci est le graphe d'une fonction affine $x \mapsto mx+p$. Or, le tableau des signes du binôme x^2-mx+p montre bien que $mx+p$ ne peut être supérieur à x^2 qu'entre les deux racines de $x^2 - mx + p$, si celles-ci existent. En particulier, pour $|x|$ assez grand, $x^2 > mx+p$, ce qui montre que le point $(x, mx+p)$ n'appartient pas à l'intérieur de la parabole. L'intersection entre la parabole est la droite est donc bornée (suivant le signe du discriminant du binôme cité plus haut, cette intersection peut-être vide, un point ou un segment).

Le lemme conclut alors : si un nombre fini de paraboles recouvrait le plan, celles-ci recouvriraient en particulier toutes les droites du plan. Mais, si l'on choisit une droite qui n'est parallèle à aucun des axes, on a alors un nombre fini d'ensembles bornés qui recouvre une droite, ce qui est absurde.

Parties de tennis

Question

Roger est un joueur de tennis de très haut niveau, Éric un joueur du dimanche. On vous propose de jouer trois parties contre les deux, alternativement, et de vous donner un prix si vous gagnez deux parties consécutives. Avez-vous intérêt à jouer Roger, Éric puis Roger, ou Éric, Roger puis Éric ?

Réponse

Il peut être tentant d'imaginer que jouer le meilleur joueur une seule fois est un bon calcul, mais on va voir que ce raisonnement est faux.

Notons p_R la probabilité de gagner un match contre Roger et $p_É$ celle de gagner contre Éric. On suppose que les résultats des trois parties sont indépendants. Naturellement, l'hypothèse sur les forces respectives de vos deux adversaires se traduit par l'inégalité $p_R < p_É$.

Pour gagner deux parties consécutives, il y a trois possibilités, mutuellement disjointes :
— gagner les trois parties ;
— gagner les deux premières parties et perdre la troisième ;
— perdre la première partie et gagner les deux dernières.

Dans l'hypothèse où vous jouez Éric deux fois, cela donne donc votre probabilité de gagner le prix :

$$\begin{aligned} P(\text{gagner le prix en jouant ÉRÉ}) &= p_É \cdot p_R \cdot p_É + p_É \cdot p_R \cdot (1 - p_É) + (1 - p_É) \cdot p_R \cdot p_É \\ &= p_É^2 \, p_R + 2 p_É \, p_R \, (1 - p_É) \\ &= p_É \, p_R \, (p_É + 2(1 - p_É)) \\ &= p_É \, p_R \, (2 - p_É) \,. \end{aligned}$$

De la même façon, un calcul symétrique prouve que

$$P(\text{gagner le prix en jouant RÉR}) = p_É \, p_R \, (2 - p_R) \,.$$

Comme $p_R < p_É$, on a $2 - p_R > 2 - p_É$ et

$$p_É \, p_R \, (2 - p_R) > p_É \, p_R \, (2 - p_É) \,.$$

Ainsi, il vaut mieux jouer le joueur le plus faible au cours de la partie du milieu, même si cela implique de jouer le plus fort deux fois !

2015 jetons

Question

2015 jetons bicolores (blancs d'un côté, noirs de l'autre) sont posés sur une table. Alice et Bob jouent alors à un (long) jeu : chacun leur tour, ils ont le choix entre retourner ou retirer un certain nombre de jetons de la même couleur. Il est interdit de ne rien faire. Le vainqueur est celui qui retire le dernier jeton.

Qui peut s'assurer de gagner ?

Réponse

Le premier joueur peut s'assurer de gagner : puisque 2015 est impair, il y a strictement plus de jetons d'une couleur que de l'autre. En retirant ces jetons surnuméraires, le premier joueur donne donc le trait à son adversaire dans une situation symétrique : il y a maintenant autant de jetons de chaque couleur (remarquons que si la situation de départ était complètement monochrome, suivre cette stratégie revient à tout retirer, ce qui provoque immédiatement la victoire).

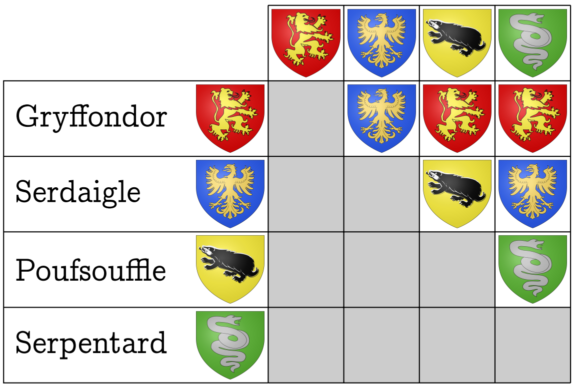
Maintenant, que le deuxième joueur retire des jetons ou qu'il en retourne, il brisera cette symétrie. Le premier joueur pourra à nouveau retirer des jetons pour rendre la situation symétrique.

En continuant cette stratégie, on voit que le premier joueur rendra toujours à son adversaire une situation symétrique et que le second brisera toujours cette symétrie. Comme le premier joueur ne fait que retirer des jetons, le jeu est assuré de se terminer après au plus 2015 coups du premier joueur. *In fine*, le deuxième joueur sera obligé de prendre le dernier jeton d'une couleur, offrant ainsi la victoire à son adversaire.

Tournoi de Quidditch

Question

Lors d'un tournoi de Quidditch, quatre équipes s'affrontent une fois chacune. Le tableau suivant indique le vainqueur de chaque match.



Il est alors possible de lister les équipes, de telle sorte que chacune ait battu la suivante : par exemple, Gryffondor a battu Poufsouffle, qui a battu Serdaigle, qui a battu Serpentard.

Est-il toujours possible de faire une telle liste ? Quid si le tournoi voit s'affronter plus de quatre équipes ?

On supposera dans cette question qu'un match de Quidditch ne peut pas être nul (ce qui est discutable).

Réponse

La réponse est qu'une telle liste est toujours possible. Montrons-le par récurrence sur le nombre de joueurs. Si le tournoi voit s'affronter deux équipes (il n'y a donc qu'un match), c'est évident : on peut dire que le vainqueur a battu le perdant. (C'est également évident pour un tournoi à une équipe et pas de match, si l'on n'a pas peur des raisonnements sur l'ensemble vide).

Supposons donc que le résultat soit vrai pour tous les tournois à n équipes, et essayons d'en déduire le résultat pour $n+1$ équipes : on peut commencer par oublier une équipe (que l'on notera $\acute{E}_0$) et regarder simplement les matchs ayant opposé les n autres. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut numéroter les équipes restantes $\acute{E}_1, \acute{E}_2, \dots, \acute{E}_n$ de telle sorte que $\acute{E}_1$ ait battu $\acute{E}_2$, qui ait battu $\acute{E}_3$, etc. jusqu'à $\acute{E}_{n-1}$ qui a battu $\acute{E}_n$.

Cherchons à insérer $\acute{E}_0$ dans cette liste. Si elle a battu $\acute{E}_1$, on peut simplement la rajouter au tout début. De même, si elle a perdu contre $\acute{E}_n$, on peut la rajouter tout à la fin. On peut donc supposer dans la suite du raisonnement que ce n'est pas le cas.

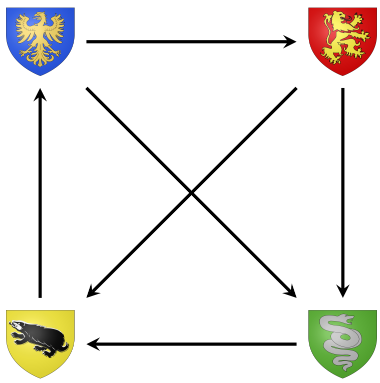
On peut alors regarder le plus petit numéro $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $\acute{E}_0$ ait gagné contre $\acute{E}_i$. Comme elle a gagné contre $\acute{E}_n$, il existe en effet de tels numéros. Comme elle a perdu contre

$\acute{E}_1$, on sait même que $i \geqslant 2$. Puisque i est le plus petit tel numéro, on sait en particulier que $\acute{E}_0$ a perdu contre $\acute{E}_{i-1}$.

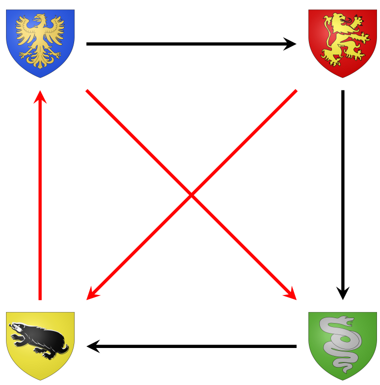
On peut alors simplement insérer $\acute{E}_0$ entre les équipes $\acute{E}_{i-1}$ et $\acute{E}_i$: $\acute{E}_1$ a battu $\acute{E}_2$, qui a battu $\acute{E}_3$, ... qui a battu $\acute{E}_{i-2}$, qui a battu $\acute{E}_{i-1}$, qui a battu $\acute{E}_0$, qui a battu $\acute{E}_i$, qui a battu $\acute{E}_{i+1}$, etc.

Cela prouve donc que tous les tournois possèdent cette propriété.

Remarque. On peut traduire ce résultat en termes de graphes. En théorie des graphes, un *tournoi* est une orientation du graphe complet K_n, c'est-à-dire un graphe orienté tel qu'il existe exactement une arête entre deux sommets quelconques. On interprête l'existence d'une arête allant de v à w comme voulant dire que v a battu w. Par exemple, notre tournoi de Quidditch correspond au graphe suivant.



Le résultat que l'on vient de montrer se traduit alors en le fait que tout tournoi possède un *chemin hamiltonien dirigé*, c'est-à-dire un chemin respectant le sens des flèches et passant par tous les sommets. Celui de notre exemple est ici indiqué en rouge.

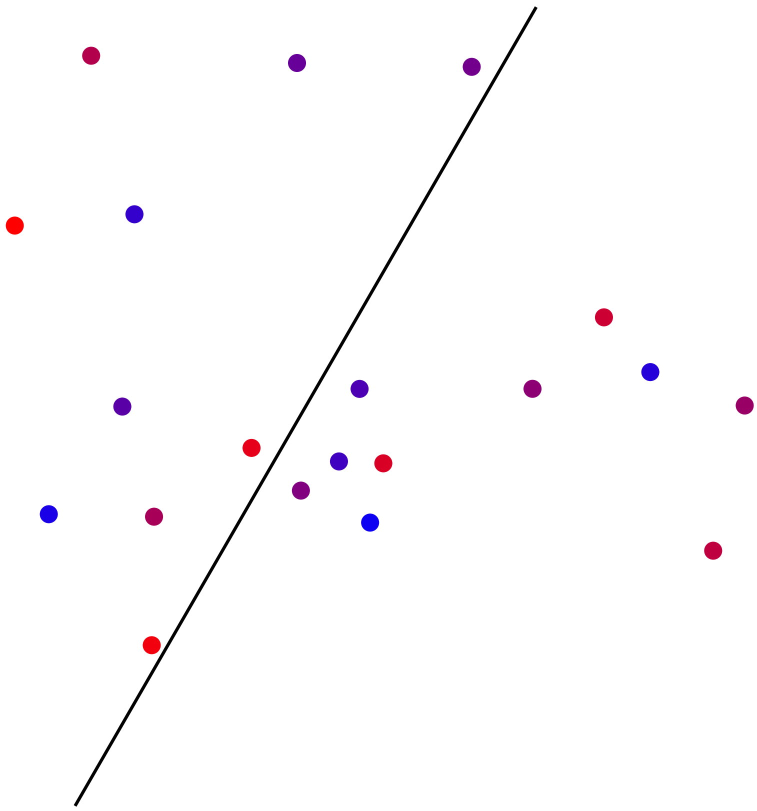


Ce résultat est dû au mathématicien hongrois László Rédei, et date de 1934.

La littérature sur les tournois est conséquente. On pourra consulter l'article *Probabiliser* sur le site *Images des Mathématiques* pour un autre résultat sur ces objets, dont la preuve fait appel à des notions de probabilités élémentaires.

Séparer 2016 points

Logo



Question

On place 2016 points dans le plan. Montrer que l'on peut trouver une droite qui sépare le plan en deux régions contenant 1008 points chacune.

Réponse

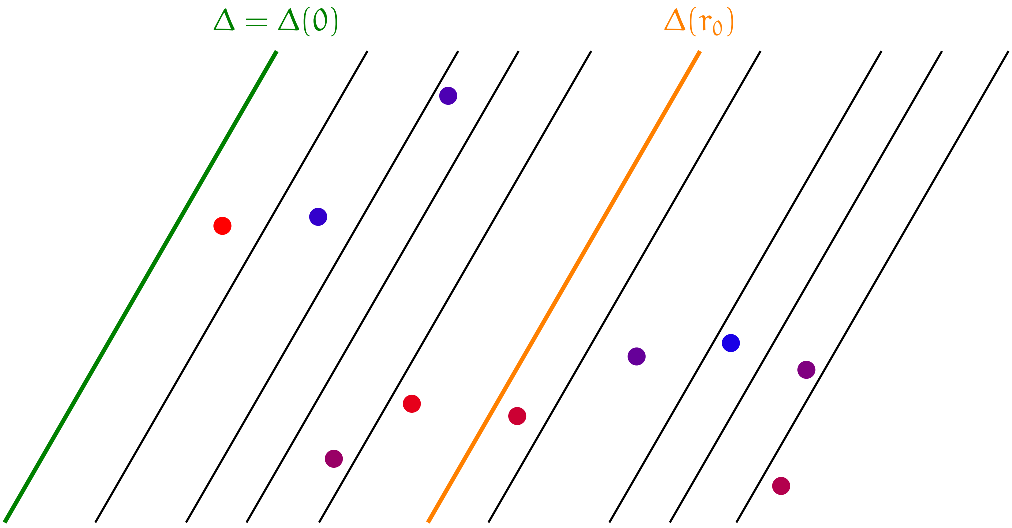
Il y a plusieurs manières de répondre à cette question, l'important étant de ne pas rentrer dans les détails géométriques de la configuration.

Choisissons une droite Δ ne contenant aucun des 2016 points donnés $P_1, P_2, \ldots, P_{2016}$ et telle que la parallèle D_i à Δ passant par P_i ne rencontre jamais d'autre point P_j. Cela est possible car il suffit de prendre Δ qui ne soit parallèle à aucune des droites $(P_i P_j)$, qui sont en nombre fini (il y en a au plus $\binom{2016}{2} = 2\,031\,120$). Quitte à translater Δ, on peut même supposer que tous les (P_i) sont du même côté de Δ (on appellera ce côté le côté intéressant).

Maintenant, pour chaque nombre réel $r \geqslant 0$, considérons la droite $\Delta(r)$, parallèle à Δ, qui est du côté intéressant et telle que la distance entre $\Delta(r)$ et Δ soit exactement r (en particulier, $\Delta = \Delta(0)$).

D'après la propriété de Δ, les $\Delta(r)$ ne contiennent jamais plus d'un point P_i. Ainsi, lorsque r augmente, le nombre $N(r)$ de points compris strictement entre Δ et $\Delta(r)$ ne croît que d'une unité à chaque fois. Puisqu'il sera égal à 2016 pour r assez grand, il devra bien être égal à 1008 pour un certain r_0, et la droite $\Delta(r_0)$ répond à la question.

Voici une illustration de cette stratégie avec 10 points.



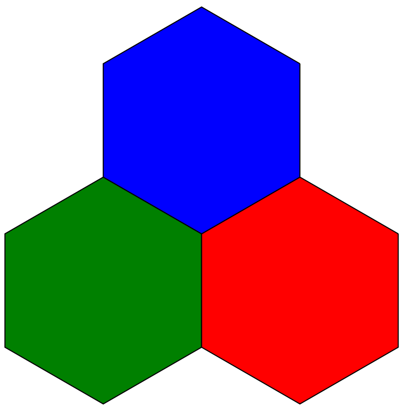
(Remarquons que l'on peut également faire une telle preuve « par balayage » en choisissant un point O tel que O, P_i et P_j ne soient jamais alignés et en considérant les différentes droites passant par O).

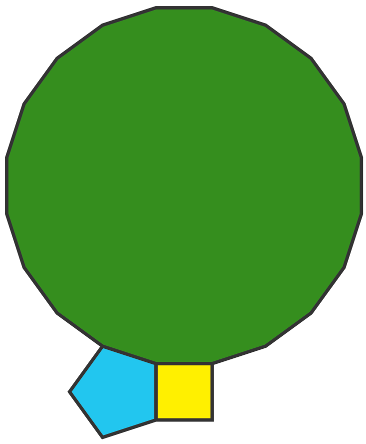
Trois polygones

Question

Il est possible de placer trois polygones réguliers (convexes) dans le plan pour qu'ils s'agencent parfaitement autour d'un sommet commun.

Les deux figures suivantes montrent deux tels agencements : à gauche avec trois hexagones réguliers et à droite avec un carré, un pentagone régulier, et un icosagone (c'est-à-dire un polygone à vingt côtés) régulier.



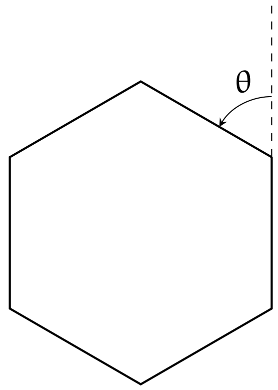


Quel est le plus grand nombre de côtés qu'un polygone présent dans un tel agencement peut avoir ?

Réponse

Pour qu'un tel agencement soit possible, il faut et il suffit que la somme des angles intérieurs des trois polygones réguliers soit égale à 2π. Or, l'angle intérieur d'un polygône à n côtés régulier convexe est $\pi - \dfrac{2\pi}{n}$. Rappelons la preuve de ce fait.

En fait, il est plus facile de déterminer l'angle extérieur θ d'un polygone régulier. En effet, si l'on parcourt le périmètre d'un tel polygone (en partant du milieu d'un côté, par exemple) dans le sens trigonométrique, on fait des trajets en ligne droite, interrompus par n rotations d'angle θ. Puisque l'on revient à la même position et dans la même direction après avoir fait un tour complet, il faut bien que $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$, ce qui donne bien un angle intérieur de mesure $\pi - \theta = \pi - \dfrac{2\pi}{n}$.



Ainsi, si $p \leqslant q \leqslant r$ sont les nombres de côtés de nos trois polygones, la relation que l'on obtient est

$$\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) + \left(\pi - \frac{2\pi}{q}\right) + \left(\pi - \frac{2\pi}{r}\right) = 2\pi \iff \pi = 2\pi\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$$
$$\iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2},$$

et il s'agit de déterminer quelle est la plus grande valeur de r pouvant intervenir dans une telle décomposition de $\frac{1}{2}$ en somme d'inverses de trois entiers $\geqslant 3$ (car le nombre de côtés d'un polygone est au moins 3).

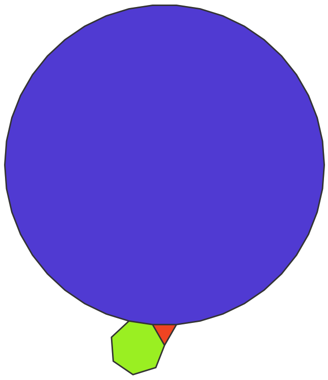
Déjà, comme $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (ce qui correspond d'ailleurs à nos trois hexagones réguliers), on ne peut pas avoir $p > 6$ et, si $p = 6$, $q = r = 6$ est la seule solution. On peut donc distinguer trois autres cas, suivant les valeurs de p.

— Si $p = 5$, on doit avoir $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$, donc $\frac{1}{q} \leqslant \frac{3}{10}$, ce qui entraîne $q \geqslant 4$. On a donc dans ce cas
$$\frac{1}{r} \geqslant \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \implies r \leqslant 20.$$

— Si $p = 4$, on doit avoir $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{q} < \frac{1}{4}$, ce qui entraîne $q \geqslant 5$. On a donc dans ce cas
$$\frac{1}{r} \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \implies r \leqslant 20,$$
la solution limite $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ correspondant au deuxième exemple donné dans la question.

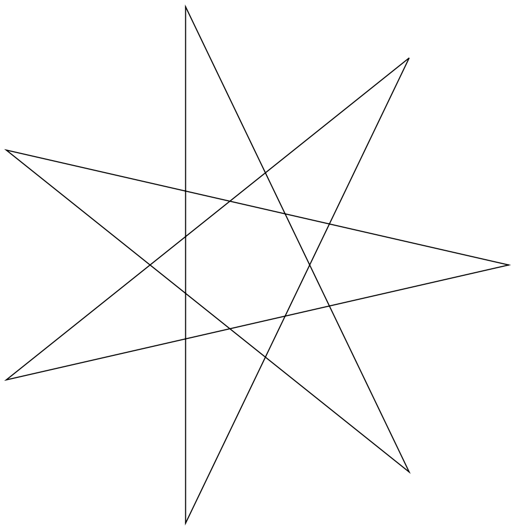
— Si $p = 3$, on doit avoir $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, donc $\frac{1}{q} < \frac{1}{6}$, ce qui entraîne $q \geqslant 7$. On a donc dans ce cas
$$\frac{1}{r} \geqslant \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \implies r \leqslant 42,$$
avec une solution limite $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ correspondant à cet agencement d'un triangle, d'un heptagone et d'un 42-gone [1] réguliers :

1. En suivant Kepler et Conway, on peut appeler un tel polygone un *tetracontakaidigone*.



Ainsi, le plus grand grand nombre de côtés possible pour un polygone régulier s'agençant parfaitement avec deux autres polygones réguliers est 42.

Remarque. Le texte original de la question ne mentionnait pas l'hypothèse de convexité des polygones réguliers. C'était une erreur. La définition de polygone régulier inclut généralement les *polygones réguliers étoilés*, comme celui figurant sur la figure suivante.



De tels polygones peuvent être vus comme une variante du n-gone régulier où, au lieu de relier chaque sommet et son voisin, on relie les sommets en en « sautant » $m-1$ à chaque fois. Il est relativement facile de se convaincre que cette construction fournit bien un polygone si $m \leqslant n$ et que n et m sont premiers entre eux. En fait, remplacer m par $n-m$ ne change pas le polygone, donc on peut supposer $2m \leqslant n$. Le n-gone régulier convexe correspond au choix $m = 1$, le polygone de notre figure à $n = 7$ et $m = 3$. Dans la suite, on notera ce polygone régulier $\{m/n\}$.

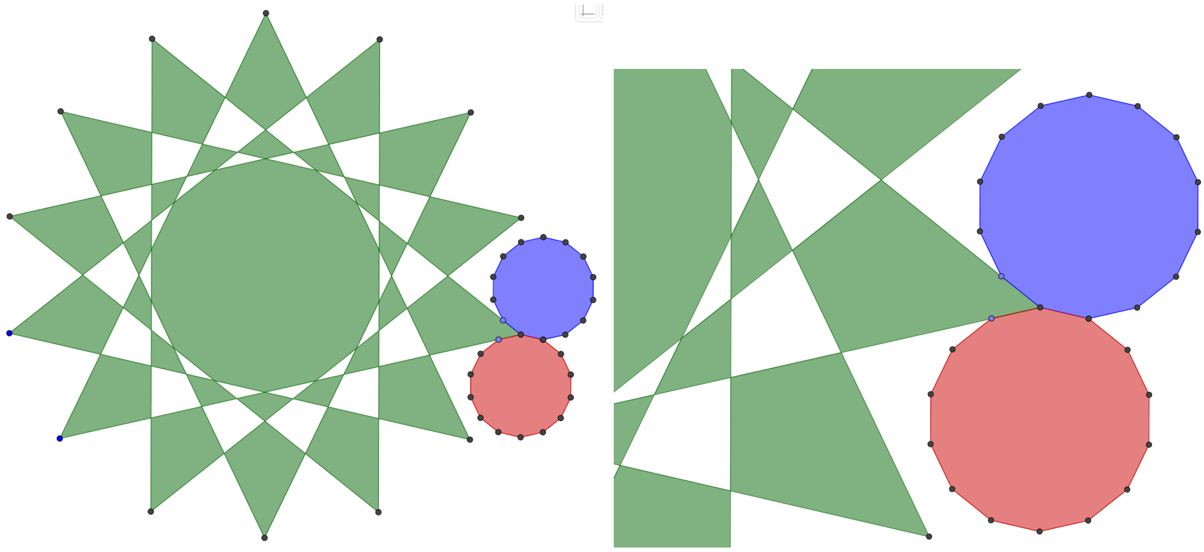
On peut en fait calculer les angles intérieurs de $\{m/n\}$ en recourant à la même méthode que pour les polygones réguliers. Si l'on note θ l'angle extérieur à chaque sommet, la seule différence avec le calcul donné plus haut pour les polygones réguliers convexes et qu'après être revenu sur ses pas, une personne marchant sur le polygone étoilé $\{m/n\}$ aura fait m tours. On a donc $\theta = \dfrac{2\pi m}{n}$, et l'angle intérieur vaut donc $\pi - \theta$. En refaisant le même calcul, on voit par exemple qu'il est possible d'agencer parfaitement un polygone étoilé de symbole $\{m/n\}$, un p-gone régulier convexe et un q-gone régulier convexe autour d'un sommet si

$$\frac{m}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$$

On voit par exemple qu'une possibilité est

$$\frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

qui correspond bien à un agencement de polygones pourvu que $2-n$ et n soient premiers entre eux, ce qui arrive si et seulement si n est impair. Voici par exemple un agencement de trois tétradécagones (14-gones) réguliers, dont un est étoilé.



Ainsi, si l'on n'impose pas aux polygones d'être convexes, il y a des solutions avec des nombres arbitrairement grands de côtés, et la question perd son sens.

Une équation du second degré

Question

Résoudre (à la main !) l'équation $x^2 + x = 1111111122222222$.

Réponse

Le discriminant de l'équation est $\Delta = 1 + 4444444488888888 = 4444444488888889$. On pourrait résoudre l'équation par la méthode standard, en utilisant une méthode d'extraction de racine carrée à la main, mais nous allons contourner ce calcul.

En revanche, vu la forme singulière du second membre, on peut facilement récrire

$$\begin{aligned} x^2 + x = 1111111122222222 &\iff x(x+1) = 1111111111111111 + 11111111 \\ &\iff x(x+1) = \frac{10^{16}-1}{9} + \frac{10^8-1}{9}, \end{aligned}$$

car le n-ième *repunit*, c'est-à-dire le nombre dont l'écriture est consituée de n « 1 », vaut $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$ comme on peut le voir, soit à l'aide de la formule pour la somme d'une suite géométrique :

$$R_n = 1 + 10 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{10 - 1},$$

soit en remarquant que le nombre constitué de n « 9 » est manifestement $10^n - 1$ (mais ces deux arguments ne sont pas si différents...) ?

L'équation devient alors

$$\begin{aligned} x(x+1) = \frac{10^{16}-1}{9} + \frac{10^8-1}{9} &\iff x(x+1) = \frac{(10^8-1)(10^8+1)}{9} + \frac{10^8-1}{9} \\ &\iff x(x+1) = \frac{(10^8-1)(10^8+2)}{9} \\ &\iff x(x+1) = \frac{10^8-1}{3} \times \frac{10^8+2}{3}, \end{aligned}$$

et l'on voit que $x = \frac{10^8-1}{3} = \frac{99999999}{3} = 33333333$ est une solution « évidente ».

Il suffit ensuite de se souvenir que les deux racines d'un trinôme $x^2 + bx + c$ ont pour somme $-b$ (et produit c) pour en déduire que l'autre racine est -33333334.

Recouvrements

Question

Soit Ω un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de Ω telles que $A \cup B = \Omega$?

Réponse

Si $A \cup B = \Omega$, les éléments de Ω sont de trois types :

— les éléments appartenant à A mais pas à B ; nous dirons qu'un tel élément est **bleu**.

— les éléments appartenant à B mais pas à A ; nous dirons qu'un tel élément est **rouge**.

— les éléments appartenant à la fois A et B ; nous dirons (logiquement) qu'un tel élément est **magenta**.

Remarquons que rien n'oblige toutes les couleurs à être représentées. Par exemple, si $A = B = \Omega$, tous les éléments sont **magenta**.

Réciproquement, si nous colorons arbitrairement tous les éléments de Ω en **bleu**, **rouge** et **magenta**, il est facile de construire des parties A et B qui redonneront ce coloriage. En effet, il suffit de prendre pour A l'ensemble des éléments **bleus** ou **magenta** et pour B l'ensemble des éléments **rouges** ou **magenta**.

Ainsi, il y a autant de couples de parties (A, B) telles que $A \cup B = \Omega$ que de coloriages des éléments de Ω en trois couleurs. Un tel coloriage n'étant rien d'autre qu'une fonction $\Omega \to \{\textbf{bleu}, \textbf{rouge}, \textbf{magenta}\}$, il y en a exactement 3^n.

Tournoi des Six Nations

Question

Lors du Tournoi des Six Nations, on dit qu'une équipe réalise un *Grand Chelem* si elle bat toutes les autres équipes. Pour cette question, on dira qu'une équipe A réalise un *Petit Chelem* si, à chaque fois que l'on considère une autre équipe B, alors A a battu B ou A a battu une équipe qui a battu B.

Par exemple, lors de l'édition 2015 du Tournoi, les Gallois n'ont pas réalisé de Grand Chelem, puisqu'ils ont perdu contre les Anglais, mais ils ont réalisé un Petit Chelem, puisqu'ils ont battu toutes les autres équipes, et en particulier les Irlandais, qui ont à leur tour battu les Anglais. (L'Irlande et l'Angleterre ont elles aussi réalisé un Petit Chelem).

Montrer que quand il n'y a pas de match nul, une équipe au moins réalise toujours un Petit Chelem.

On rappelle que lors du Tournoi des Six Nations, chaque équipe affronte toutes les autres exactement une fois.

Réponse

Chaque équipe du Tournoi aura gagné un certain nombre (entre 0 et 5) de victoires. Considérons une équipe A qui a remporté un nombre maximal de victoires et montrons que A a réalisé un Petit Chelem (cela explique en particulier pourquoi lors du Tournoi 2015, l'Angleterre, l'Irlande et le Pays de Galles, qui avaient tous les trois remporté quatre de leurs cinq matchs, avaient tous les trois réalisé un Petit Chelem).

Pour que A n'ait pas réalisé de Petit Chelem, il faudrait qu'une certaine équipe, appelons-la B, ait battu A et qu'il n'existe pas d'équipe ayant perdu contre A et gagné contre B. Autrement dit, B devrait avoir battu A et toutes les équipes que A a battues. Cela entraîne immédiatement que B a eu strictement plus de victoires que A, ce qui est une contradiction.

Remarque. Comme on le voit dans l'exemple du Tournoi 2015, cette notion de Petit Chelem n'est pas un très bon moyen de désigner un vainqueur pour un tournoi. En fait, elle possède un assez grand nombre de propriétés étonnantes, comme par exemple :

— Sauf dans les cas où une équipe a réalisé un Grand Chelem, au moins trois équipes réalisent toujours un Petit Chelem.

— Quand le nombre d'équipes d'un tournoi devient grand, si l'on suppose que le résultat de chaque match est tiré au sort, la probabilité que toutes les équipes réalisent un Petit Chelem tend vers 1.

Pour en apprendre plus sur cette étrange notion (qui provient historiquement de l'étude des relations de domination dans les groupes de poules), on recommande l'excellent article *The King Chicken Theorem* de Stephen B. Maurer.

Retourner une carte rouge

Question

Alice et Bob jouent à un jeu : Alice a mélangé un jeu de 32 cartes et a étalé les cartes en rang sur une table, face cachée. Elle va retourner une à une toutes les cartes.

Entre le début du jeu et le moment où Alice retournera la dernière carte, Bob devra annoncer « Stop ! ». Il aura alors gagné si la carte suivante s'avère être rouge, et perdu sinon.

Quelle est la meilleure stratégie pour Bob ?

Réponse

La réponse est que Bob n'a pas de bonne ou de mauvaise stratégie. Quoi qu'il fasse, sa probabilité de gagner est de $1/2$.

Il y a plusieurs façons de vérifier ce résultat, mais la plus simple est de modifier le jeu. Imaginons que tout se passe comme dans la question, sauf qu'après que Bob aura annoncé « Stop ! », Alice retournera la dernière carte (et Bob gagne si elle est rouge). Dans ces conditions, il est évident que la probabilité que Bob a de gagner est la probabilité que la dernière carte soit rouge, c'est-à-dire $1/2$, et ce quelle que soit sa stratégie. Or, du point de vue de la statégie de Bob, rien ne différencie les cartes non encore retournées les unes des autres, donc rien ne distingue cette version modifiée du jeu de la précédente.

Remarque. Ce résultat est en fait un cas très simple d'un théorème sophistiqué de probabilités, le *théorème d'arrêt de Doob*.

Robinet empoisonné

Question

Dans une pièce, mille robinets (numérotés de 0 à 999) sont en accès libre. L'eau que l'un d'entre eux donne est empoisonnée. Un professeur dispose de dix étudiants : tous les matins, ceux-ci ont accès à la salle et pourront goûter à l'eau d'autant de robinets qu'ils le souhaitent.

Si un étudiant boit de l'eau empoisonnée, il tombe malade dans la journée et est renvoyé chez lui (en particulier, on ne peut plus l'utiliser comme goûteur les jours suivants). Vous êtes le professeur et voulez identifier le robinet empoisonné. Quelle stratégie mettez-vous au point pour y parvenir le plus vite possible ?

Réponse

Une journée suffit, en utilisant l'écriture binaire des numéros des robinets.

Changeons pour simplifier les paramètres de la question : imaginons qu'il y ait huit robinets (numérotés de 0 à 7) et trois étudiants : Alice, Bob et Carole. On peut convertir les numéros des robinets en binaire : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 et 111. Le professeur attribue alors à chaque étudiant un chiffre : à Alice le chiffre de gauche, à Bob celui du milieu et à Carole celui de droite. La consigne est alors que chacun d'entre eux doit goûter les robinets dont le chiffre qui leur a été attribué est 1. Autrement dit, voilà la liste des robinets qu'ils doivent goûter.

Alice	100, 101, 110 et 111
Bob	010, 011, 110 et 111
Carole	001, 011, 101 et 111.

Le professeur n'a plus alors qu'à noter quels étudiants tombent malades et en déduire le numéro du robinet empoisonné : le premier chiffre de son écriture est un 1 si Alice est malade et 0 sinon, et *idem* pour les deuxième et troisième chiffre en fonction de la santé de Bob et Carole.

Cette stratégie fonctionne parce qu'il y a assez d'étudiants pour « couvrir » tous les chiffres de l'écriture binaire des robinets. Autrement dit, elle fonctionne tant que le nombre de robinets est inférieur ou égal à 2^s, où s est le nombre d'étudiants.

Dans le cas de l'énoncé, il y a $1000 < 1024 = 10^{10}$ robinets, donc la même stratégie fonctionne (mais elle exige que les étudiants boivent beaucoup d'eau ; par exemple, l'étudiant affecté au chiffre des unités devra goûter l'eau des robinets dont le numéro est impair, c'est-à-dire 500 robinets différents...).

Un hommage à Sophie Germain

Question

À l'occasion de la journée Sophie Germain ayant lieu demain à l'Institut Henri Poincaré (avec notamment le lancement du timbre à son effigie), la question du jour est un résultat qui lui est attribué.

Montrer que pour tout $n > 1$, le nombre $n^4 + 4$ n'est pas premier.

Réponse

La réponse tient en une ligne :

$$n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

(Évidemment, il faut aussi dire que si $n \geqslant 2$, alors $n^2 \geqslant 2n$ donc les deux facteurs sont au moins égaux à 2, et la factorisation n'est pas triviale.)

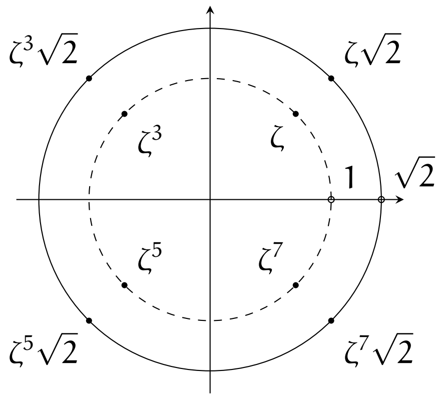
Même si la factorisation ci-dessus se démontre directement en développant, il peut être intéressant d'expliquer comment on peut l'obtenir sans la connaître *a priori*. Donnons deux arguments différents.

1. Une méthode efficace quoique détournée pour factoriser un entier ou une expression algébrique repose sur l'identité remarquable $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (c'est peut-être la meilleure façon de se souvenir que $91 = 100 - 9$ n'est pas premier, par exemple !) Cette méthode s'applique ici assez directement :

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2). \end{aligned}$$

2. Si l'on veut retrouver la formule sans faire appel à aucune astuce de quelle sorte que ce soit, l'approche la plus systématique est de factoriser le polynôme $X^4 + 4$ d'abord dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$. Si on note $\zeta = \zeta_8 = \exp\left(\frac{2i\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (de telle sorte que les racines huitièmes de l'unité soient exactement les puissances de ζ, et donc que les racines quatrièmes de -1 soient exactement ζ, ζ^3, ζ^5, ζ^7), les racines du polynôme sont les nombres $\zeta\sqrt{2}$, $\zeta^3\sqrt{2}$, $\zeta^5\sqrt{2}$ et $\zeta^7\sqrt{2}$, ce qui donne la factorisation

$$X^4 + 4 = \left(X - \zeta\sqrt{2}\right)\left(X - \zeta^3\sqrt{2}\right)\left(X - \zeta^5\sqrt{2}\right)\left(X - \zeta^7\sqrt{2}\right).$$



Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}$, il faut maintenant regrouper les racines conjuguées ; on obtient alors les facteurs

$$\left(X-\zeta\sqrt{2}\right)\left(X-\zeta^7\sqrt{2}\right)=X^2-2X+2$$
$$\left(X-\zeta^3\sqrt{2}\right)\left(X-\zeta^5\sqrt{2}\right)=X^2+2X+2,$$

ce qui démontre bien l'identité recherchée :

$$X^4+4=(X^2-2X+2)(X^2+2X+2).$$

Remarque. Sous la forme

$$a^4+4b^4=(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2),$$

cette identité est connue sous le nom d'*identité de Sophie Germain*, cf. par exemple le livre *Solutions d'expert* d'Arthur Engel (éditions Cassini, 2007).

Sophie Germain (1776-1831) a effectivement démontré (par une autre méthode) que les nombres de la forme n^4+1 n'étaient jamais premiers, cf. par exemple le site *Theorem of the day* et les références qu'il contient.

Circuit aérien

Question

Un avion survole un circuit parfaitement circulaire, en s'assurant de terminer sa trajectoire exactement là où il l'avait commencée. Autrement dit, sa trajectoire décrit une courbe fermée dans l'espace qui se projette sur un cercle au sol.

Montrer qu'il existe deux points opposés de sa trajectoire (c'est-à-dire deux points à la verticale de points diamétralement opposés du circuit) qui sont à la même altitude.

Réponse

On va modéliser le problème en considérant la fonction h qui associe à une position au sol la hauteur de l'avion quand celui-ci la survole. Il s'agit *a priori* d'une fonction $C \to \mathbb{R}$, où C est le circuit survolé par l'avion.

Soit x_0 le point de C à la verticale duquel l'avion part. Pour plus de commodité, nous allons repérer les points de C par leur distance à x_0, mesurée le long du cercle (dans le sens de parcours de l'avion). Autrement dit, si L est la longueur de C, les points de C sont exactement les x_ℓ, pour $0 \leqslant \ell \leqslant L$, et $x_L = x_0$.

L'intérêt de ce paramétrage de C est qu'il permet de parler commodément des points opposés de C : ce sont simplement les couples $(x_\ell, x_{\ell+L/2})$, pour $\ell \in [0, L/2]$.

On définit alors la fonction

$$h : [0, L] \to \mathbb{R}$$

qui associe à tout ℓ la hauteur à laquelle l'avion passe au-dessus de x_ℓ. Elle vérifie $h(L) = h(0)$ et il est naturel de la supposer continue (car $\ell \mapsto x_\ell$ l'est et qu'il est physiquement raisonnable d'imaginer que la trajectoire d'un avion est continue). Après notre travail de paramétrage, la question devient simplement de montrer qu'il existe $\ell \in [0, L/2]$ tel que $h(\ell + L/2) = h(\ell)$. Énonçons cela comme un résultat mathématique.

Théorème (Borsuk-Ulam en dimension 1, première version). Soit $h : [0, L] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $h(L) = h(0)$. Alors il existe $\ell \in [0, L/2]$ tel que

$$h(\ell) = h(\ell + L/2).$$

Preuve. On définit une fonction auxiliaire $g : [0, L/2] \to \mathbb{R}$ par la formule $g(\ell) = h(\ell) - h(\ell + L/2)$. Il s'agit manifestement d'une fonction continue, et nous souhaitons simplement montrer qu'elle s'annule.

Pour cela, remarquons que

$$\begin{aligned}
g(L/2) &= h(L/2) - h(L) \\
&= h(L/2) - h(0) && \text{(par hypothèse sur } h\text{)} \\
&= -\left(h(0) - h(L/2)\right) \\
&= -g(0).
\end{aligned}$$

En particulier, g prend des valeurs de signes opposés aux bornes de son intervalle de définition. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cela entraîne qu'il existe $\ell \in [0, L/2]$ tel que $g(\ell) = 0$, ce qui conclut la preuve.

Remarquons que l'on peut également énoncer notre résultat dans une formulation plus proche de celle de la question initiale. On se restreint simplement au cercle unité S^1 pour que les points diamétralement opposés soient les couples $(x, -x)$.

Théorème (Borsuk-Ulam en dimension 1, deuxième version). Soit $h : S^1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le cercle unité S^1. Alors il existe un point x tel que $h(x) = h(-x)$.

Comme on vient de le dire, ce théorème est en fait une conséquence simple du théorème des valeurs intermédiaires. Il est un cas particulier d'un théorème de topologie plus difficile, le théorème de Borsuk-Ulam.

Théorème (Borsuk-Ulam). Soit $h : S^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue définie sur la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors il existe un point $x \in S^n$ tel que $h(x) = h(-x)$.

La tradition veut que l'on illustre ce théorème en énonçant la conséquence du cas $n = 2$ selon laquelle il existe à tout moment deux points diamétralement opposés de la Terre en lesquels la température et la pression coïncident.

Le théorème de Borsuk-Ulam est une conséquence de techniques classiques (mais avancées) de topologie algébrique. Il a par ailleurs de nombreux liens surprenants avec la combinatoire, détaillés dans l'ouvrage *Using the Borsuk-Ulam Theorem* de Jiří Matoušek.

Tirage au sort

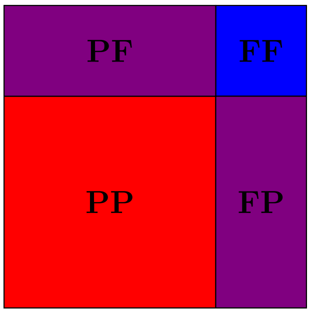
Question

Vous devez tirer au sort équitablement entre deux joueurs mais ne disposez pour ce faire que d'une pièce biaisée (dont vous ignorez en plus le biais exact). Comment faire ?

Réponse

La solution la plus simple est de faire des séries de deux lancers de pile ou face et de s'arrêter quand une de ces séries ne renvoie pas deux fois le même résultat.

En effet, quelle que soit la probabilité p qu'a la pièce de tomber sur pile, les probabilités que deux lancers successifs fassent pile puis face ou face puis pile sont les mêmes, à savoir $p(1-p)$. Géométriquement, il s'agit simplement du fait que les deux rectangles non carrés de la figure suivante ont la même aire.



Cette figure illustre d'ailleurs le fait (relativement intuitif) que plus la pièce est biaisée, plus la probabilité $2p(1-p)$ de tomber sur deux résultats différents est faible, et donc plus il faudra tirer un grand nombre de séries (en moyenne) pour enfin obtenir deux résultats différents.

Cette question appartient au thème des *extracteurs d'aléa*. Plus précisément, on vient de définir *l'extracteur de Von Neumann*.

Score impossible

Question

Dans un certain sport, les actions peuvent rapporter 6, 9 ou 20 points. Quel est le plus grand score qui soit impossible à atteindre ?

Réponse

Commençons par déterminer les nombres de points que l'on peut obtenir en n'exécutant que les actions qui rapportent 6 et 9 points. Puisque $6 = 3 \times 2$ et $9 = 3 \times 3$, il est déjà clair que l'on n'obtiendra de la sorte que des multiples de 3.

Mais on peut dire mieux. Pour cela, démontrons un résultat intermédiaire.

Lemme. Tout nombre entier $\geqslant 2$ peut s'écrire sous la forme $a \times 2 + b \times 3$.

Preuve. La preuve de ce résultat est très simple, mais repose sur un principe qui nous resservira, que l'on va appeler le *principe des scores consécutifs*. Le point-clef est que 2 et 3 sont deux entiers consécutifs pouvant s'écrire sous la forme demandée (de façon tautologique, dans leur cas). En ajoutant 2, on obtient qu'il en va alors de même de 4 et 5. En rajoutant 2, de 6 et 7, et ainsi de suite pour tous les entiers successifs : comme 2 est dans la liste des scores autorisés, il suffit de trouver 2 scores consécutifs pour obtenir tous les scores supérieurs.

On a donc résolu notre question intermédiaire : les scores (strictement positifs) possibles à partir d'actions valant 6 et 9 points sont exactement les scores de la forme $3 \times n$, où n est un entier $\geqslant 2$.

Que se passe-t-il si l'on s'autorise maintenant l'action à 20 points ? Comme 6 et 9 sont toujours des multiples de 3, il va falloir utiliser l'action à 20 points pour obtenir des scores qui ne sont pas multiples de 3. Plus précisément, comme $20 = 3 \times 6 + 2$ et $40 = 3 \times 13 + 1$, il va falloir au moins effectuer cette action une fois pour obtenir des scores de la forme $3k + 2$ et au moins deux fois pour obtenir des scores de la forme $3k + 1$. Cela démontre déjà que tous les scores de la forme $3k + 1$ inférieurs à 40 sont impossibles (le dernier est $37 = 3 \times 12 + 1$) et même que 43 est impossible, car il faudrait pour l'obtenir marquer deux fois 20 points, mais il est alors impossible de marquer les trois points manquants.

Pour vérifier que les nombres supérieurs à 43 sont des scores possibles, on peut alors adopter plusieurs stratégies :

— On peut utiliser le principe des scores consécutifs, d'après lequel il suffit de trouver 6 scores possibles consécutifs pour être sûr de pouvoir obtenir tous les scores suivants. Il est alors facile de démontrer que les entiers de 44 à 49 sont effectivement des scores possibles, par exemple avec les décompositions suivantes :

$$44 = 20 + 6 \times 4, \qquad 45 = 9 \times 5, \qquad 46 = 20 \times 2 + 6$$
$$47 = 20 + 9 \times 3, \qquad 48 = 6 \times 8, \qquad 49 = 20 \times 2 + 9.$$

— On peut également faire une disjonction de cas suivant le reste de la division du nombre par 3.

1. Pour un nombre $\geqslant 6$ multiple de 3, on a vu au début du raisonnement que l'on pouvait obtenir un tel score uniquement avec les actions à 6 et 9 points.
2. Pour un nombre $n \geqslant 26$ de la forme $3k+2$, il suffit d'appliquer le cas précédent à $n-20$, qui est un multiple de 3, et d'ajouter une action à 20 points.
3. Pour un nombre $n \geqslant 46$ de la forme $3k+1$, il suffit d'appliquer le premier cas à $n-40$, qui est un multiple de 3, et d'ajouter deux actions à 20 points.

Comme tous les entiers $\geqslant 44$ sont dans l'une des trois catégories précédentes, cela démontre bien que 43 est le plus grand score impossible.

Remarques.

— Les scores possibles dans un sport forment ce que l'on appelle un *semigroupe numérique.* Par exemple, on s'est intéressé ici au semigroupe $\langle 6,9,20\rangle$. On peut relativement facilement démontrer que si les nombres de points rapportés par les différentes actions (les *générateurs* du semigroupe) n'ont pas de diviseur commun >1, alors tous les scores sont possibles à partir d'un certain rang (inclus), que l'on appelle le *conducteur* du semi-groupe (et l'entier qui le précède est appelé le *nombre de Frobenius*). Ici, on a donc démontré que le nombre de Frobenius de $\langle 6,9,20\rangle$ était 43. Le problème de la détermination du nombre de Frobenius d'un semi-groupe numérique est un problème extrêmement compliqué et très largement ouvert. Pour en savoir plus sur ce sujet, on ne saurait trop recommander l'excellent article *Semi-groupes numériques et conjecture de Wilf* de Shalom Eliahou, paru sur *Images des Mathématiques.*

— Pour ces valeurs spécifiques, on parle parfois du problème des *Chicken McNuggets*, car ces produits étaient vendus par boîtes de 6, 9 et 20. On pourra consulter la vidéo correspondante de l'excellente chaîne Youtube Numberphile.

Série de pile ou face

Question

Lassés du pile ou face classique, Alice et Bob cherchent à en créer une variante. Alice propose la procédure suivante à Bob : elle jettera la pièce 11 fois et Bob 10 fois et le joueur obtenant le plus de pile gagnera. Pour compenser son lancer supplémentaire, Alice perdra en cas d'égalité.

Bob doit-il accepter cette procédure ?

Réponse

La nouvelle procédure est en fait équitable : Bob peut l'accepter ou la refuser au gré de sa fantasie.

Pour nous en convaincre, analysons la situation après qu'Alice et Bob ont lancé la pièce 10 fois chacun (c'est-à-dire avant le dernier lancer d'Alice). À ce moment-là, trois situations peuvent se produire :

— Il est possible qu'Alice ait déjà obtenu strictement plus de fois pile que Bob. Dans ce cas, elle est sûre de gagner, car son dernier lancer ne peut qu'aggraver la situation de Bob.

— De façon symétrique, il est possible que Bob ait obtenu strictement plus de fois pile qu'Alice. Dans ce cas, Bob gagnera nécessairement, car Alice ne peut pas espérer faire mieux qu'égaliser, ce qui donne la victoire à Bob.

— Enfin, il est possible qu'Alice et Bob aient obtenu le même nombre de fois pile. Dans ce cas, le dernier lancer d'Alice désignera le vainqueur : ce sera Alice si la pièce tombe sur pile et Bob si elle tombe sur face. Leurs chances sont donc les mêmes.

Que donne cette disjonction de cas au niveau des probabilités ? Par symétrie, il est évident que les deux premières options ont la même probabilité, que l'on notera p (et que l'on n'a pas besoin de calculer) et donc que la troisième a une probabilité de $1 - 2p$.

Alice gagne donc avec une probabilité

$$\begin{aligned} P(\text{Alice gagne}) &= P(\text{première option}) + \frac{1}{2} \times P(\text{troisième option}) \\ &= p + \frac{1-2p}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Partition sans divisibilité

Question

On répartit les entiers de 1 à n en k classes de telle sorte que deux éléments d'une même classe ne se divisent jamais l'un l'autre. Quel est la plus petite valeur possible pour k ?

Réponse

Soit 2^p la plus grande puissance de 2 comprise entre 1 et n (autrement dit, soit $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$). On remarque déjà que les entiers $1, 2, \ldots, 2^p$ possèdent la propriété qu'étant donné deux d'entre eux, l'un divise forcément l'autre. Cela a pour conséquence qu'une partition respectant la contrainte de la question doit nécessairement les envoyer dans des classes distinctes. En particulier, quelle que soit la partition, on a forcément $k \geqslant p + 1$.

Réciproquement, notons A_i l'ensemble des entiers compris entre 2^i et $2^{i+1} - 1$. Quand deux entiers se divisent l'un l'autre, le plus grand des deux est au moins égal au double du premier. En particulier, deux éléments de A_i ne peuvent pas se diviser l'un l'autre. On a donc trouvé $p + 1$ classes qui conviennent :

$$A_0 = \{1\}, A_1 = \{2, 3\}, \ldots, A_p \cap \{1, 2, \ldots, n\} = \{2^p, 2^p + 1, \ldots, n\}.$$

Le nombre k optimal est donc bien $p + 1 = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$.

Remarque. On peut en fait essayer de généraliser cette question à des relations plus générales que celle de divisibilité. La notion de *relation d'ordre* généralise les relations comme la relation d'ordre usuelle $\leqslant$, la divisibilité, l'inclusion, etc. Autrement dit, il s'agit de relations exprimant l'idée qu'un objet est plus petit qu'un autre, mais sans que deux éléments donnés soient forcément comparables. [1] Une partie dans laquelle deux éléments donnés sont toujours comparables (comme $\{1, 2, \ldots, 2^p\}$ pour la divisibilité) est appelée une *chaîne*. À l'inverse, une partie dans laquelle deux éléments différents ne sont jamais comparables (comme nos A_i) est appelée une *antichaîne*. La question était donc ici de partitionner l'ensemble des entiers compris entre 1 et n en un nombre minimal d'antichaînes (pour la relation de divisibilité).

Le premier argument que nous avons donné se traduit dans ce langage plus sophistiqué en disant que le nombre minimal de classes est au moins égal au cardinal maximal d'une chaîne. Dans notre exemple, nous avons trouvé une partition explicite qui montrait que cette inégalité est optimale. C'est un fait un cas particulier d'un résultat important de combinatoire, le théorème de Dilworth.

1. Formellement, une relation d'ordre $\sqsubseteq$ sur un ensemble E est une relation *réflexive* (c'est-à-dire $\forall x \in E, x \sqsubseteq x$), *transitive* ($\forall x, y, z \in E, x \sqsubseteq y$ et $y \sqsubseteq z \implies x \sqsubseteq z$) et *antisymétrique* ($\forall x, y \in E, x \sqsubseteq y$ et $y \sqsubseteq x \implies x = y$).

Tétraèdre et octaèdre

Question

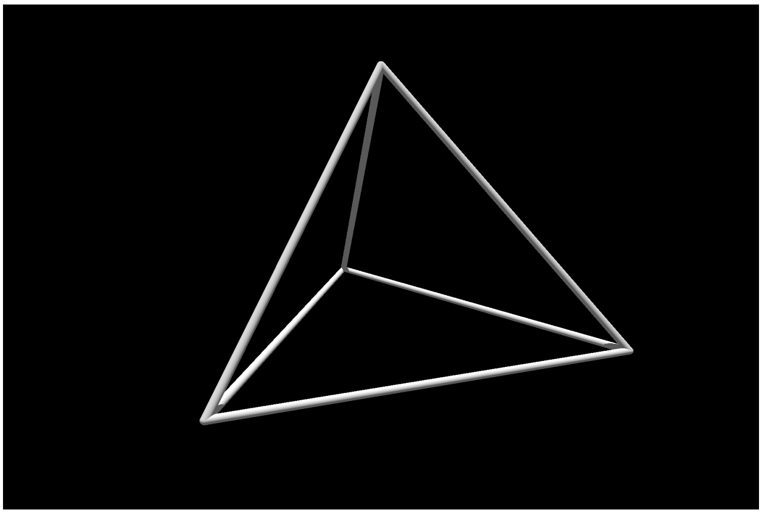
Quel est le rapport entre le volume d'un octaèdre régulier et celui d'un tétraèdre régulier de même côté ?

Réponse

Nous allons proposer deux méthodes pour faire ce calcul, l'une calculatoire et l'autre géométrique.

1. Prenons le côté de nos polyèdres réguliers comme unité de longueur et calculons les deux volumes.

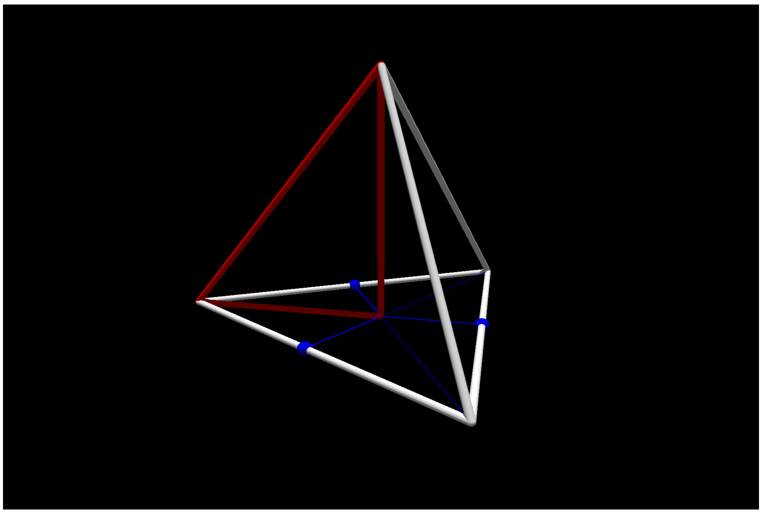
   Rappelons tout d'abord que le volume d'une pyramide Π de hauteur h et dont la base a une aire A est
   $$\mathrm{vol}[\Pi] = \frac{1}{3} A\, h.$$
   Une méthode pour se convaincre de ce fait est de découper la pyramide Π en tranches. Si on note, pour $0 \leqslant t \leqslant h$, P_t le plan parallèle à la base de la pyramide qui se trouve entre la base et le sommet, et à distance t de celui-ci, la figure $\Pi \cap P_t$ est une image de la base $\Pi \cap P_h$, dilatée par un facteur $\frac{t}{h}$, en vertu du théorème de Thalès. En particulier, on a $\mathrm{aire}\,[\Pi \cap P_t] = \left(\frac{t}{h}\right)^2 \mathrm{aire}\,[\Pi \cap P_h] = \frac{t^2}{h^2} A$. On a alors
   $$\begin{aligned} \mathrm{vol}[\Pi] &= \int_0^h \mathrm{aire}\,[\Pi \cap P_t]\, dt \\ &= \int_0^h \frac{t^2}{h^2} A\, dt \\ &= \frac{A}{h^2} \int_0^h t^2\, dt \\ &= \frac{1}{3} A\, h. \end{aligned}$$
   On peut maintenant calculer le volume de nos deux polyèdres réguliers.
   — Le tétraèdre régulier est une pyramide dont la base est un triangle équilatéral de côté 1.



En vertu du théorème de Pythagore, la hauteur de celui-ci est alors $\sqrt{3}/2$ et son aire est donc

$$\text{aire}\,[\text{base}_{\text{tétraèdre}}] = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Il reste à déterminer la hauteur $h_{\text{tétraèdre}}$ du tétraèdre régulier. En projetant le sommet sur la base, on obtient un triangle rectangle (en rouge sur la figure).



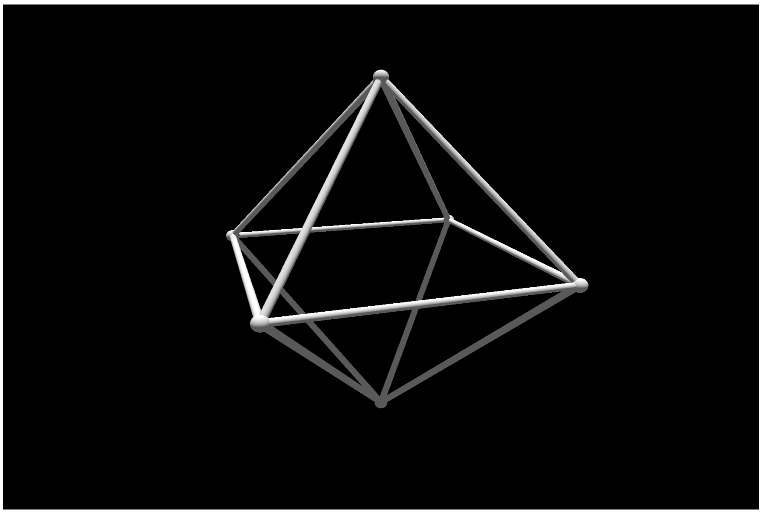
Le pied de la hauteur ainsi construite est le centre de gravité de la base. Ainsi, le côté horizontal du triangle a une longueur $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Comme l'hypothénuse du triangle rectangle mesure 1, le théorème de Pythagore implique

$$h^2_{\text{tétraèdre}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad h_{\text{tétraèdre}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{vol}[\text{tétraèdre}] &= \frac{1}{3}\,\text{aire}\,[\text{base}_{\text{tétraèdre}}]\; h_{\text{tétraèdre}} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

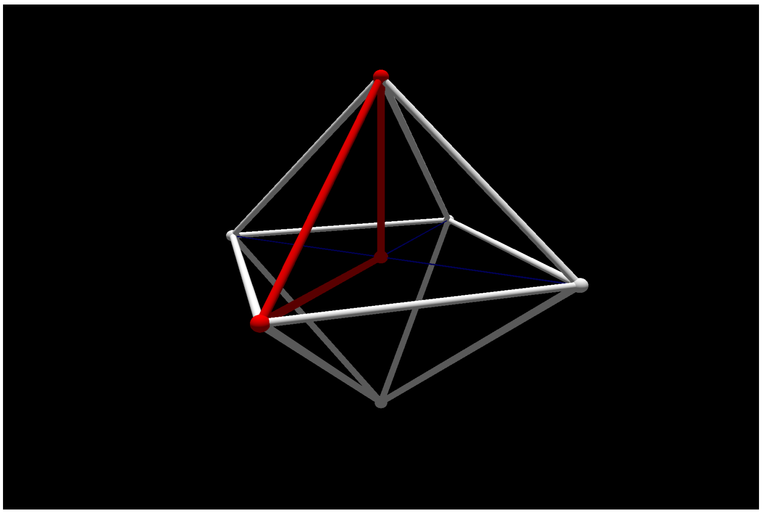
— De son côté, l'octaèdre régulier est obtenu en empilant l'une sur l'autre deux pyramides dont la base est un carré de côté 1.



Pour chacune d'elles, on a donc évidemment

$$\mathrm{aire}\,[\mathrm{base}_{\mathrm{pyramide}}] = 1$$

et il reste à déterminer leur hauteur h_{pyramide}.
En projetant le sommet de l'une des pyramides sur la base, on obtient un triangle rectangle (en rouge sur la figure).



L'hypothénuse de ce triangle mesure 1, et les deux côtés de l'angle droit mesurent $\sqrt{2}/2$ (c'est la moitié d'une diagonale du carré) et h_{pyramide}. Le théorème de Pythagore entraîne alors

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h_{\mathrm{pyramide}}^2 = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad h_{\mathrm{pyramide}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

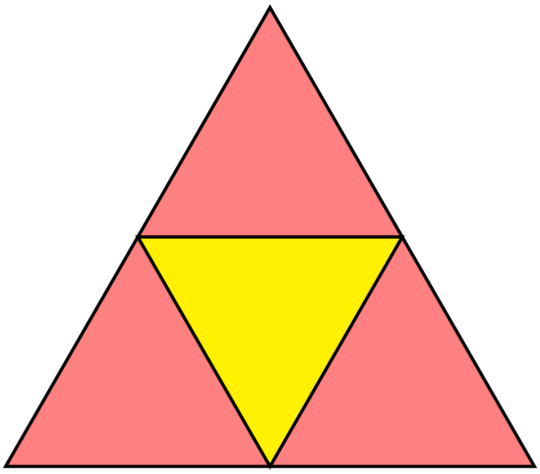
On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}[\mathrm{octaèdre}] &= 2\,\mathrm{vol}[\mathrm{pyramide}] \\ &= \frac{2}{3}\,\mathrm{aire}\,[\mathrm{base}_{\mathrm{pyramide}}]\ h_{\mathrm{pyramide}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

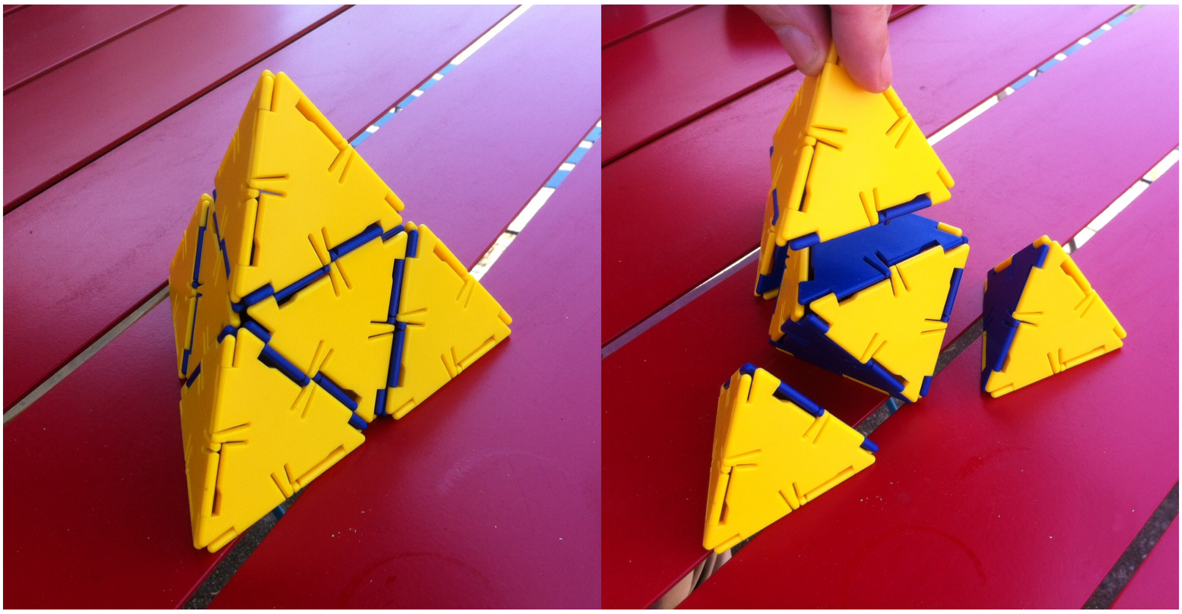
En particulier,

$$\frac{\text{vol}\,[\text{octaèdre}]}{\text{vol}\,[\text{tétraèdre}]} = 4.$$

2. On peut également démontrer le même résultat par un découpage. Rappelons qu'en deux dimensions, si on enlève à un triangle équilatéral ses trois « pointes », c'est-à-dire les triangles équilatéraux deux fois plus petits inscrits dans le triangle initial et partageant un de ses sommets, la figure restante est elle-même un triangle équilatéral, isométrique aux pointes.



Que se passe-t-il si l'on fait la même chose en trois dimensions, c'est-à-dire si l'on enlève les quatre pointes (qui sont quatre tétraèdres deux fois plus petits) à un tétraèdre régulier ? Comme le montrent les photos suivantes, on obtient un octaèdre régulier !



En effet, la figure restante a deux types de faces (en bleu et jaune sur les images) : les faces (jaunes) qui sont incluses dans celles du tétraèdre initial et celles (bleues) qui proviennent de la découpe.

Les premières sont exactement les triangles centraux du dessin en deux dimensions que l'on vient d'évoquer : ce sont bien des triangles équilatéraux. Les secondes sont des faces de tétraèdres réguliers, donc sont également des triangles équilatéraux. Comme une face jaune partage ses côtés avec des faces bleues, ces deux types de triangles font bien la même taille : on se retrouve donc bien avec un polyèdre régulier dont les huit faces sont des triangles équilatéraux, c'est-à-dire un octaèdre régulier.

Il suffit alors de compter : les petits tétraèdres équilatéraux étant deux fois plus petits que l'initial, leur volume est 8 fois moindre. L'octaèdre central a donc un volume

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}[\text{octaèdre}] &= \mathrm{vol}[\text{grand tétraèdre}] - 4\,\mathrm{vol}[\text{petit tétraèdre}] \\ &= 8\,\mathrm{vol}[\text{petit tétraèdre}] - 4\,\mathrm{vol}[\text{petit tétraèdre}] \\ &= 4\,\mathrm{vol}[\text{petit tétraèdre}].\end{aligned}$$

Les petits tétraèdres et l'octaèdre central ayant les mêmes côtés, on a donc encore une fois montré que le rapport des volumes était de 4.

Vous pouvez trouver à cette adresse une animation illustrant le découpage du tétraèdre en quatre petits tétraèdres et un octaèdre.

Merci à Clément Caubel pour les photos !

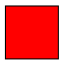
À la mémoire de S. Golomb

Question

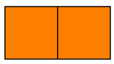
Solomon Golomb s'est éteint le 1er mai 2016. Il était une figure importante du lien entre recherche mathématique et mathématiques récréatives. Il est notamment l'inventeur d'un système de compression sans perte.

Du côté des mathématiques récréatives, son nom est surtout attaché au concept de *polyominos*, figures obtenues en assemblant des carrés de même taille. On a ainsi

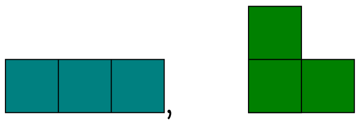
— un *monomino* :



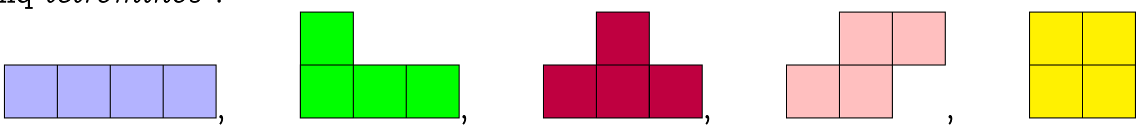
— un *domino* :



— deux *triominos* :



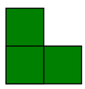
— cinq *tétrominos* :



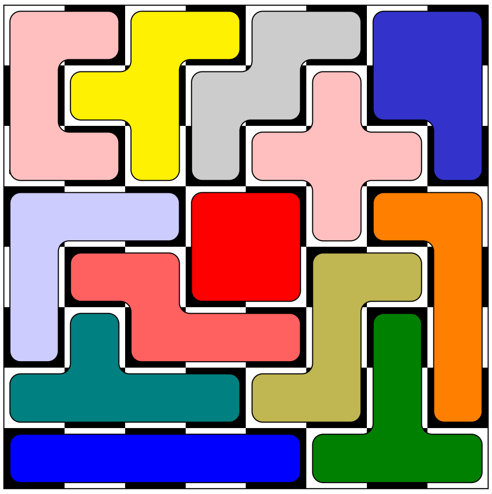
— etc.

L'ouvrage *Polyominoes : Puzzles, Patterns, Problems, and Packings* de Golomb, publié par la prestigieuse *Princeton University Press* est en quelque sorte l'acte de naissance d'une théorie organisée des polyominos (même si le concept est évidemment beaucoup plus ancien et que le premier article de Golomb sur la question, *Checker Boards and Polyominoes*, date de 1954). Selon *The Aperiodical*, la traduction russe de ce livre inspira Alexeï Pajitnov, le créateur du mythique jeu vidéo Tetris.

On s'intéresse aujourd'hui à une question analysée par l'article fondateur de 1954, celle du pavage d'un échiquier 8×8 par des triominos. Comme 64 n'est pas un multiple de 3, il n'est pas possible de paver complètement un échiquier par des triominos. Mais 63 est un multiple de 3, ce qui rend naturelles les questions suivantes :

1. On pose un monomino sur une des cases d'un échiquier 8×8. Peut-on paver les 63 cases restantes par 21 triominos « coudés »  ?
2. Même question avec 21 triominos « droits »  ?

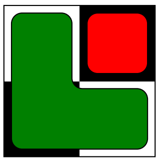
Un *pavage* par des polyominos est une manière de placer les polyominos, de manière à ce qu'ils recouvrent chaque case de l'échiquier, sans se superposer. Voici par exemple un pavage de l'échiquier 8×8 par les 12 pentominos et le tétromino carré.



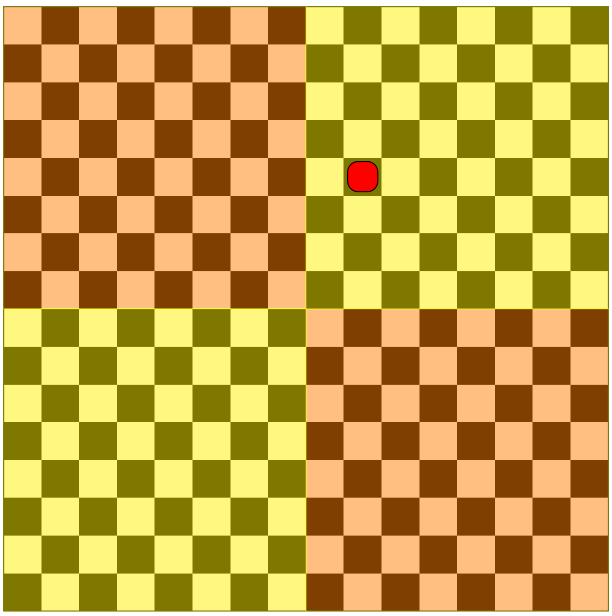
La réponse à nos questions peut *a priori* dépendre de la case sur laquelle est d'abord posée le monomino.

Réponse

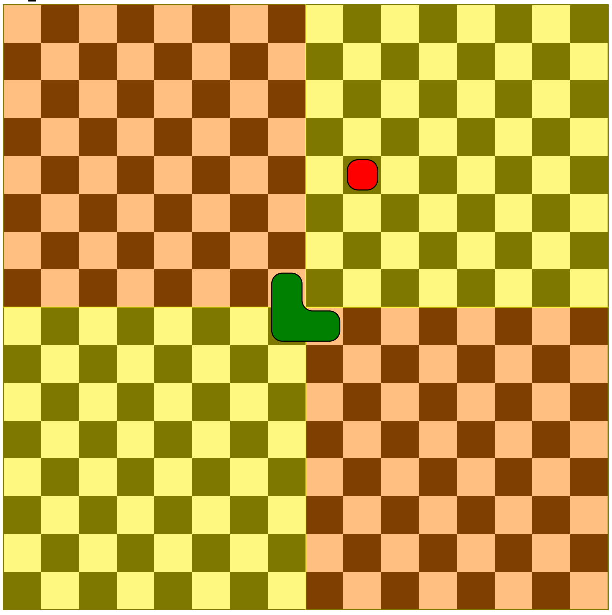
1. Quelle que soit la case sur laquelle on pose le monomino, le reste de l'échiquier est toujours pavable par 21 triominos coudés. En fait, on va démontrer par récurrence que si l'on pose un monomino sur un échiquier de taille $2^n \times 2^n$, on peut toujours paver le reste de l'échiquier par des triominos coudés.
   — Le cas $n = 1$ est facile : le monomino a forcément été posé sur un coin, et le reste de l'échiquier forme naturellement un triomino coudé.



   — Supposons le cas de l'échiquier $2^n \times 2^n$ démontré, et posons un monomino sur un échiquier $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. On peut découper le grand échiquier en quatre parties de taille $2^n \times 2^n$, dont une seule contient le monomino.

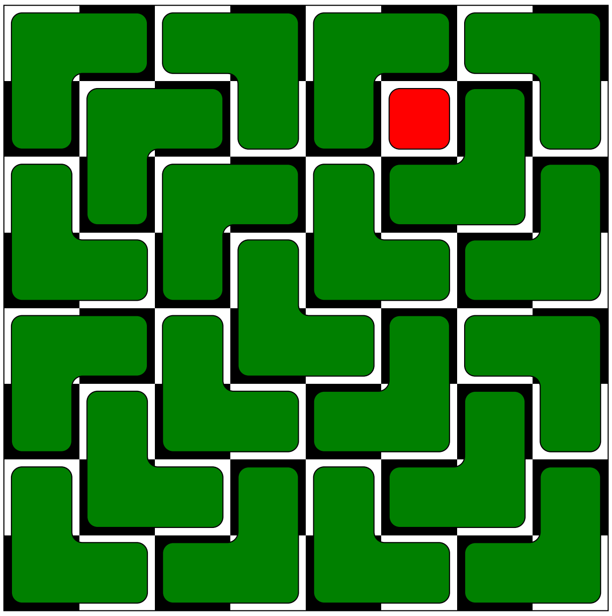


On peut alors poser au centre de l'échiquier un triomino coudé qui chevauche les trois autres sous-échiquiers.

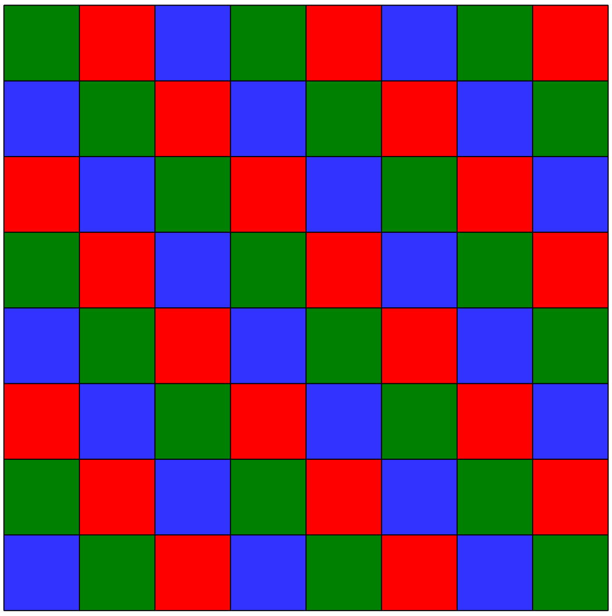


On se retrouve donc avec quatre échiquiers de taille $2^n \times 2^n$ sur chacun desquels une case est déjà occupée. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut donc placer des triominos coudés sur chacun des ces sous-échiquiers. On obtient ainsi un pavage du grand échiquier, ce qui conclut la preuve par récurrence.

La preuve par récurrence donne en fait une méthode algorithmique pour paver l'échiquier, où que soit posé le monomino. Voici un exemple de résultat.

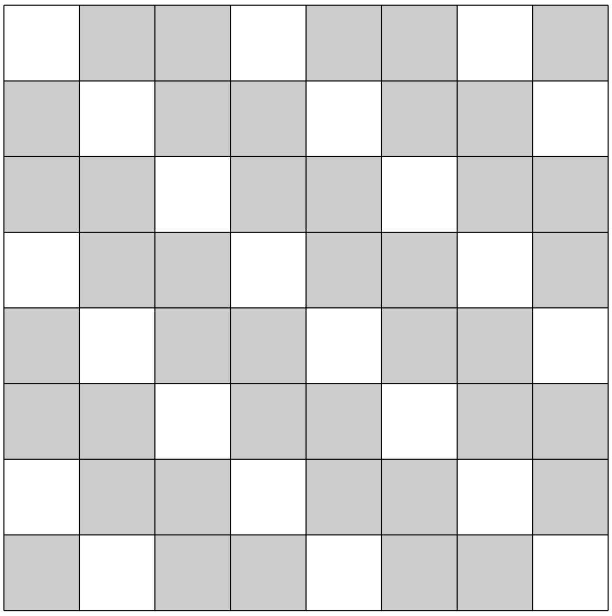


2. On va voir que pour la plupart des cases sur lesquelles on peut poser le monomino, il est ensuite impossible de paver le reste avec des triominos droits. Commençons par recolorier l'échiquier, avec trois couleurs (bleu, vert et rouge), de façon alternée.



Si l'on pose sur un tel échiquier un triomino droit, les trois cases du triomino seront sur trois cases de couleurs différentes. Or, contrairement au coloriage classique de l'échiquier, les trois couleurs ne sont pas représentées équitablement sur l'échiquier (ce serait impossible, puisque 3 ne divise pas 64). Plus précisément, il y a 21 cases bleues et rouges, et 22 cases vertes.

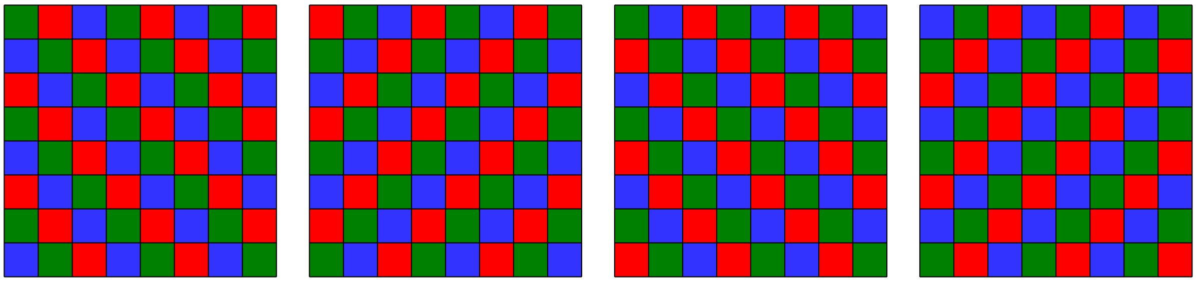
Pour que l'on puisse paver l'échiquier avec un monomino et 21 triominos droits, il faut donc que le monomino soit sur une case verte. Autrement dit, si le monomino est sur une des cases grisées dans le dessin suivant, le pavage sera impossible :



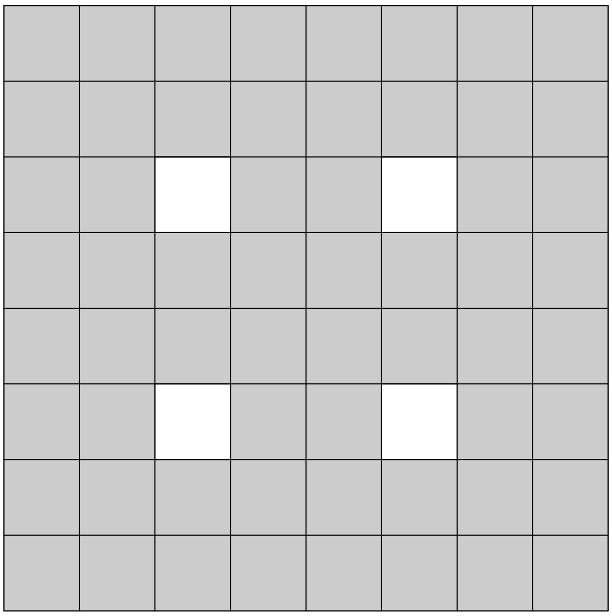
Cependant, le dessin que l'on vient d'obtenir n'est pas symétrique, ce qui nous permet de dire mieux. Prenons un exemple : on vient de montrer que si l'on pose le monomino dans le coin inférieur gauche, on ne pourra pas paver le reste. Notre argument ne marchait pas pour le coin inférieur droit, mais il est évident que si l'un est impossible, l'autre également. (Si on pouvait paver le carré par un monomino dans le coin inférieur droit et 21 triominos, il suffirait de tourner l'échiquier d'un quart de tour pour obtenir un pavage où le monomino est dans le coin inférieur gauche, ce que l'on vient d'exclure).

Plus généralement, toutes les cases qui sont envoyées par une symétrie du carré sur une case grisée sont également des cases qui ne pourront pas accueillir le monomino.

Une manière équivalente d'utiliser la symétrie est de dire que l'on peut répéter l'argument de coloriage avec les coloriages obtenus en faisant subir à notre coloriage original toutes les isométries du carré possible : une case qui n'est pas verte pour **tous** les coloriages ainsi obtenue est une case impossible.

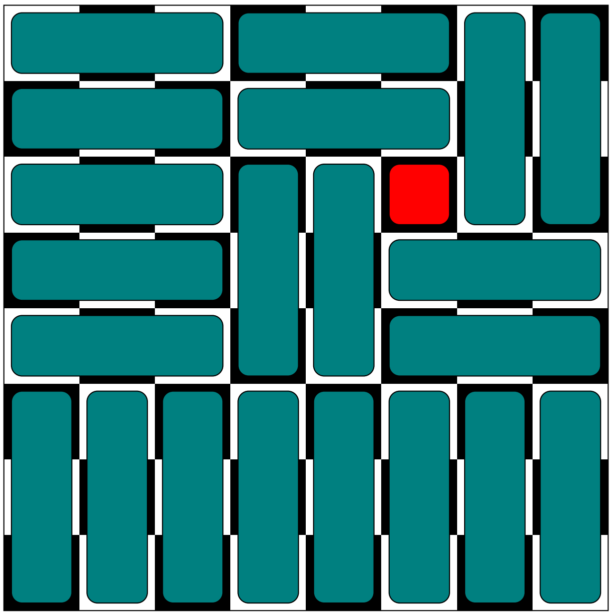


Quelle que soit la manière de présenter cet argument de symétrie, on peut alors vérifier que presques toutes les cases sont maintenant exclues. Pour être plus précis, toutes les cases grisées dans le dessin suivant sont impossibles.



Puisque les quatre cases restantes sont toutes images les unes des autres par des symétries du carré, il ne reste donc plus qu'une question à trancher : peut-on paver l'échiquier en utilisant un monomino en f7 (pour utiliser les coordonnées du jeu d'échec) et 21 triominos ?

On vérifie alors aisément que c'est effectivement possible.



En résumé, il sera possible de paver le reste de l'échiquier par des triominos droits si et seulement si le monomino est initialement posé sur une des quatre cases c3, f3, c7 ou f7.

1010101...

Question

Parmi les nombres 101, 10101, 1010101, 101010101, etc., lesquels sont premiers ?

Réponse

101 est premier, mais nous allons montrer que les suivants ne le sont pas.

En effet, le nombre avec p zéros est

$$N(p) = \sum_{i=1}^{p} 100^i = \frac{100^{p+1} - 1}{99}.$$

Or,

$$100^{p+1} - 1 = (10^{p+1})^2 - 1 = (10^{p+1} - 1) \times (10^{p+1} + 1),$$

donc

$$N(p) = \frac{(10^{p+1} - 1) \times (10^{p+1} + 1)}{99}.$$

Le nombre $10^{p+1} - 1 = \underbrace{999\ldots999}_{p+1 \text{ chiffres}}$ est toujours divisible par 9. Comme 11 est un nombre premier, il divise au moins l'un des deux facteurs $10^{p+1} \pm 1$, d'après le lemme d'Euclide.

Ainsi, dès que $p \geqslant 2$, les deux facteurs $10^{p+1} - 1 \geqslant 999$ et $10^{p+1} + 1 \geqslant 1001$ sont supérieurs à 99, donc on obtient une factorisation non triviale qui peut être de l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{10^{p+1} - 1}{99} \times (10^{p+1} + 1), \text{ ou } \frac{10^{p+1} - 1}{9} \times \frac{10^{p+1} + 1}{11}.$$

Une transformation irréversible

Question

On se donne une liste de $n \geqslant 2$ nombres réels non nuls. À chaque étape, on choisit deux de ces nombres, appelons-les a et b, et on les remplace par $a + \frac{b}{2}$ et $b - \frac{a}{2}$, respectivement.

Montrer qu'aucune suite de telles transformations ne permettra de retrouver les n nombres originaux.

Réponse

Comme souvent dans ce genre de problèmes, l'idée naturelle est de trouver une fonction des n nombres qui croisse strictement à chaque transformation. Ici, on peut en fait chercher une fonction un petit peu plus générale : puisque l'on sait que les nombres de départ sont tous non nuls, il nous suffit de trouver une fonction dépendant de n nombres réels qui croisse à chaque transformation $(a, b) \to \left(a + \frac{b}{2}, b - \frac{a}{2}\right)$ et qui croisse même strictement si les n nombres de départ sont tous non nuls.

On trouve par tâtonnement que la somme des carrés des nombres convient. En effet, pour a et b réel,

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) + \left(b^2 - ab + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) \geqslant a^2 + b^2,$$

et l'inégalité est même stricte à moins que $a = b = 0$.

Ainsi, la somme des carrés des n nombres en présence augmente strictement à chaque transformation, tant que les nombres sont tous non nuls (en particulier, elle augmente strictement à la première transformation), puis elle continue à augmenter au sens large. En particulier, elle ne pourra jamais revenir à la valeur qu'elle possédait avant la première transformation, et aucune suite de transformations ne permet donc de revenir aux n nombres originaux.

Différence symétrique

Question

Si X et Y sont deux parties de $\{1, 2, \dots, 10\}$, on définit leur *différence symétrique* $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ comme l'ensemble des éléments appartenant soit à X soit à Y (mais pas aux deux).

Si $A_1, \dots, A_{100}$ est une liste de cent parties de $\{1, 2, \dots, 10\}$, montrer qu'il en existe deux dont la différence symétrique contient au plus deux éléments.

Réponse

Déjà, s'il existe deux indices i et j tels que $A_i = A_j$, on a $A_i \triangle A_j = \varnothing$, ce qui démontre ce que l'on veut. Dans la suite, on pourra donc supposer que les (A_i) sont tous distincts.

Si X est une partie de $\{1, 2, \dots, 10\}$ et que n est un élément de $\{1, 2, \dots, 10\}$. On peut considérer la partie $A \triangle \{n\}$ obtenue en « changeant le statut de n » c'est-à-dire en enlevant n de A s'il s'y trouvait et en le rajoutant s'il ne s'y trouvait pas. On obtient ainsi 10 nouvelles parties de $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Ainsi, chacune des cent parties $A_1, \dots, A_{10}$ définit une famille de onze parties, constituée d'elle-même et des dix parties modifiées que l'on vient de définir. Comme

$$11 \times 100 = 1100 > 1024 = 2^{10},$$

ces cent familles de onze parties chacune ne peuvent pas être disjointes. Autrement dit, on peut trouver deux parties A_i et A_j telles que la famille définie par $X = A_i$ et la famille définie par $Y = A_j$ se rencontrent. Quitte à échanger i et j, il y a deux cas de figure :

(i) Il existe un élément n de $\{1, 2, \dots, 10\}$ tel que $X \triangle \{n\} = Y$.

(ii) Il existe deux éléments n et m de $\{1, 2, \dots, 10\}$ tels que $X \triangle \{n\} = Y \triangle \{m\}$.

Nous allons démontrer que dans ces deux cas, la différence symétrique $X \triangle Y$ a deux éléments. On pourrait le faire en distinguant encore des sous-cas (par exemple, dans le premier cas, en raisonnant différemment suivant que n appartienne ou n'appartienne pas à X), mais il est plus efficace de vérifier que la différence symétrique possède la propriété que

$$X \triangle (Y \triangle Z) = (X \triangle Y) \triangle Z,$$

pour tout choix de parties X, Y et Z. En effet, on vérifie directement que cet ensemble est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à l'une des parties X, Y et Z (mais pas aux deux autres), soit aux trois simultanément. En outre, il est évident que pour toute partie X, on a $X \triangle X = \varnothing$ et que $X \triangle \varnothing = X$.

Ainsi, on peut regarder la différence symétrique $X \triangle Y$ dans chacun de nos deux cas.

(i) Si $Y = X \triangle \{n\}$, on a

$$X \triangle Y = X \triangle (X \triangle \{n\}) = (X \triangle X) \triangle \{n\} = \varnothing \triangle \{n\} = \{n\},$$

donc la différence symétrique a un seul élément.

(ii) Si $X \triangle \{n\} = Y = \triangle \{m\}$, on a

$$Y = (Y \triangle \{m\}) \triangle \{m\} = (X \triangle \{n\}) \triangle \{m\} = X \triangle (\{n\} \triangle \{m\}).$$

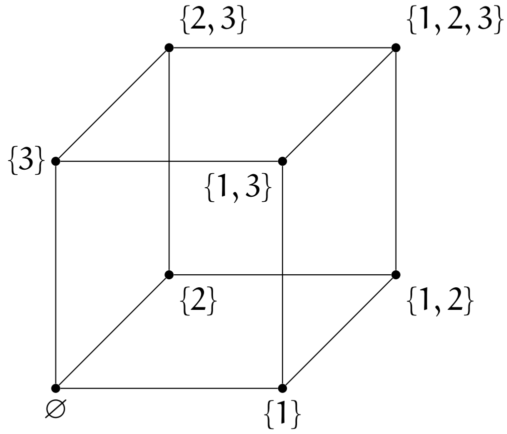
La partie $\{n\} \triangle \{m\}$ vaut $\varnothing$ si $n = m$, et la paire $\{x, y\}$ dans le cas contraire. Comme X et Y sont des parties différentes, le premier cas est exclu donc on a bien $Y = X \triangle \{n, m\}$. On conclut alors comme dans le premier cas que

$$X \triangle Y = X \triangle (X \triangle \{n, m\}) = (X \triangle X) \triangle \{n, m\} = \varnothing \triangle \{n, m\} = \{n, m\},$$

donc la différence symétrique a deux éléments, ce qui conclut la preuve.

Remarques.

— On peut en fait retraduire la preuve dans un vocabulaire un peu plus géométrique. Par exemple, on peut voir les parties de notre ensemble comme les sommets d'un graphe, où deux parties X et Y sont reliées si on peut passer de l'une à l'autre en changeant le statut d'un élément, c'est-à-dire si $X = Y \triangle \{n\}$ (ou $Y = X \triangle \{n\}$, c'est pareil), pour un certain élément n.
Voici par exemple une illustration de ce graphe pour les parties de $\{1, 2, 3\}$.



On vérifie d'ailleurs que la *distance* entre deux parties, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qu'il faut emprunter pour passer de l'une à l'autre dans le graphe, est précisément le nombre d'éléments appartenant à la différence symétrique des deux parties.
Les familles de onze éléments que nous avons définies sont alors les *boules de rayon* 1, c'est-à-dire les éléments qui sont à distance $\leqslant 1$ de la partie considérée. La fin de la preuve dit alors que si les boules de rayon 1 centrées en X et en Y s'intersectent, alors la distance entre les deux centres est $\leqslant 2$, ce qui est un cas particulier de *l'inégalité triangulaire*.

— On peut se poser en général la question de déterminer le nombre maximum $A(n, d)$ de parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dont deux quelconques X et Y vérifient toujours $|X \triangle Y| \geqslant d$. Cette question en en fait une question importante et difficile du domaine des codes correcteurs d'erreurs.
Dans ce vocabulaire, la question était de montrer que $A(10, 3) < 100$. En fait, comme $1024/11 \approx 93,09$, notre preuve montrait même que $A(10, 3) \leqslant 93$. Pour ces valeurs

spécifiques de n et d, le résultat est en fait connu et on a $A(10, 3) = 72$ (un résultat dû à Patric Östergård, Tsonka Baicheva et Emil Kolev en 1999).

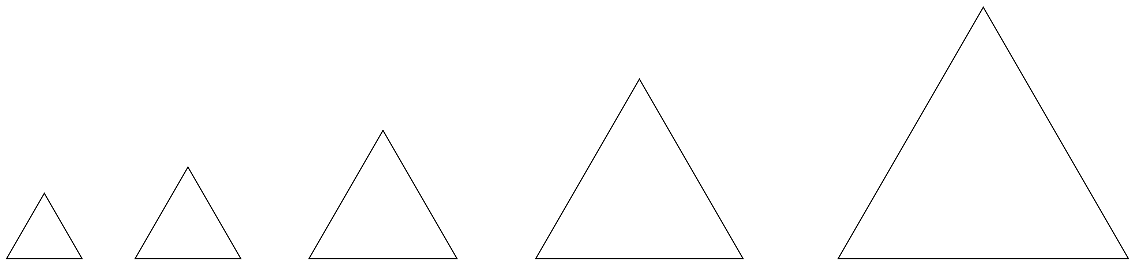
Existence de triangles

Question

À quelle condition sur trois réels strictement positifs $x \leqslant y \leqslant z$ peut-on avoir un triangle dont les côtés ont des longueurs valant x^n, y^n et z^n, et ce pour tout entier $n \geqslant 1$?

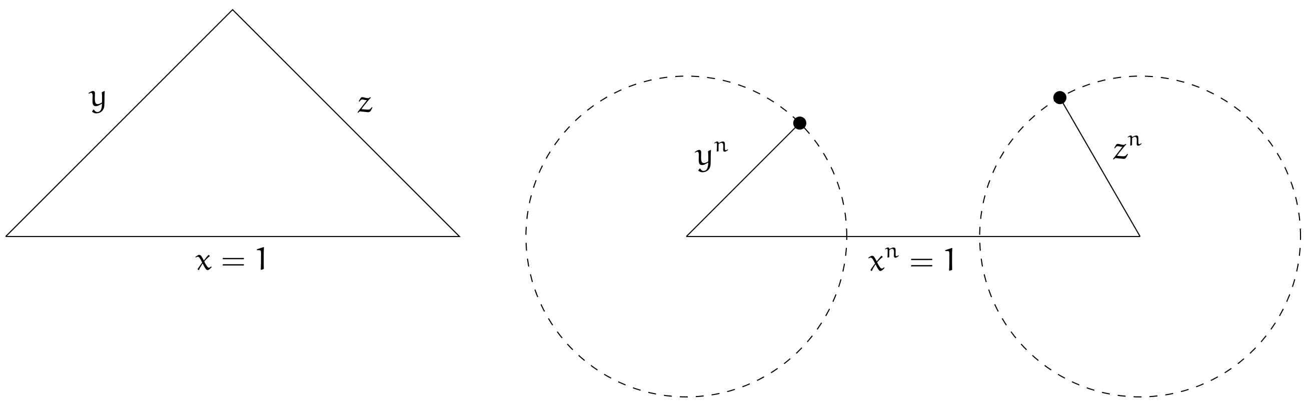
Réponse

Un exemple évident est le cas où $x = y = z$. En effet, on a alors $x^n = y^n = z^n$ pour tout $n \geqslant 1$, et il existe bien des triangles équilatéraux de toutes les tailles.



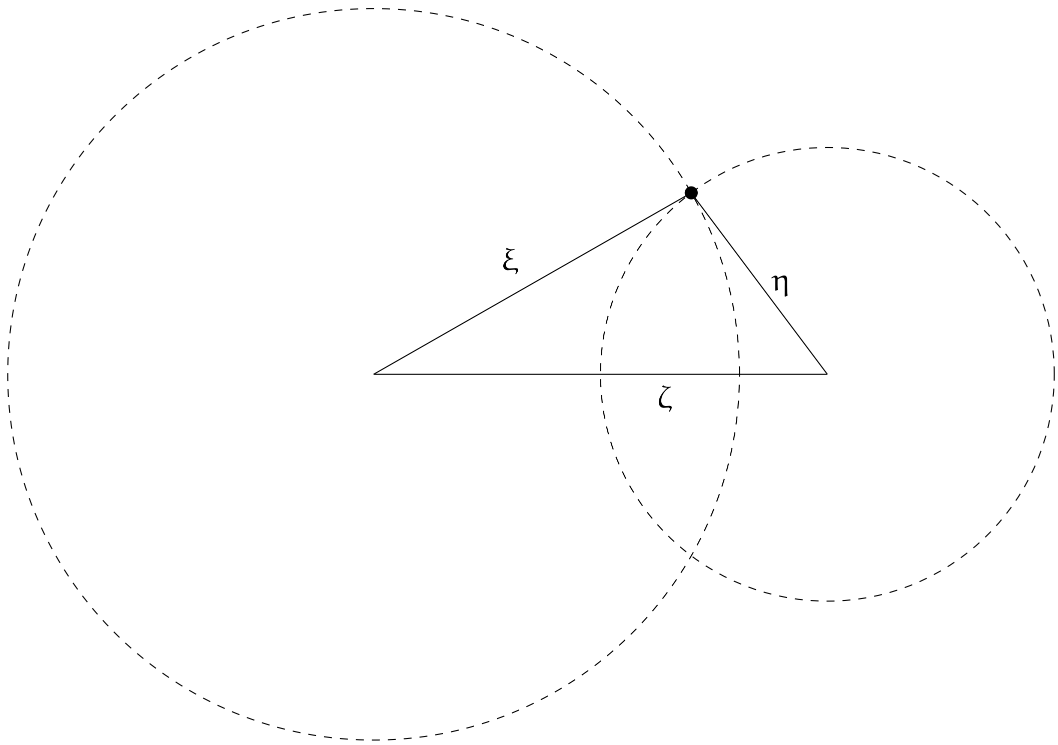
Triangles équilatéraux de côtés $(1{,}4)^n$, pour n variant entre 1 et 5.

En revanche, si l'on prend $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z = 1$, il existe certes un triangle (isocèle rectangle) de côtés x, y et z, mais on voit que quand n sera grand, z^n vaudra toujours 1 alors que $x^n = y^n$ tendra vers 0. Au bout d'un moment, il sera donc impossible de construire un triangle de côtés x^n, y^n et z^n.



On peut en fait répondre une fois pour toutes à la question : à quelle condition trois nombres réels strictement positifs $\xi \leqslant \eta \leqslant \zeta$ sont-ils les longueurs d'un triangle ? La condition nécessaire et suffisante est que $\zeta \leqslant \xi + \eta$. En effet, cette inégalité n'est autre que l'inégalité triangulaire dans ce cas. Réciproquement, si $\xi \leqslant \eta \leqslant \zeta$ vérifient $\zeta \leqslant \xi + \eta$, on peut placer deux points dans le plan A et B à distance ζ l'un de l'autre et tracer les cercles de centre

A et de rayon ξ et de centre B et de rayon η. La condition $\zeta \leqslant \xi + \eta$ montre alors que ces cercles s'intersectent, et si C est un des points d'intersection, les longueurs des côtés du triangle ABC sont bien $AC = \xi$, $BC = \eta$ et $AC = \zeta$. Dans le cas-limite $\zeta = \xi + \eta$, le triangle est d'ailleurs plat.



Ainsi, on s'est ramené à la question suivante :

À quelle condition sur les trois nombres $0 < x \leqslant y \leqslant z$ *a-t-on*

$$\forall n \geqslant 1, \qquad z^n \leqslant x^n + y^n \ ?$$

Nous allons montrer que la réponse à la question est qu'il faut et il suffit que $y = z$, c'est-à-dire que les deux plus grands nombres soient égaux.

En effet, si $y = z$, on a automatiquement, pour tout $n \geqslant 1$, $z^n = y^n \leqslant x^n + y^n$.

Réciproquement, supposons $y < z$. On a alors $x/z < 1$ et $y/z < 1$. On en déduit que

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

En particulier, il existe n_0 tel que $\left(\frac{x}{z}\right)^{n_0} + \left(\frac{y}{z}\right)^{n_0} < 1$. Pour ce n_0, on a donc

$$x^{n_0} + y^{n_0} < z^{n_0},$$

et il n'existe pas de triangle de côtés x^{n_0}, y^{n_0} et z^{n_0}.

Dés biaisés, résultat honnête

Question

Est-il possible de fabriquer deux dés biaisés tels que la somme des deux résultats prenne toute les valeurs possibles entre 2 et 12 avec la même probabilité ?

Précisons que les deux dés indiquent toujours chacun les nombres de 1 à 6 : on ne modifie que la probabilité des différents résultats (et l'on peut faire des modifications différentes pour les deux dés).

Réponse

La réponse est non.

Posons quelques notations. On va noter X (resp. Y) le résultat du premier (resp. deuxième) dé. Il s'agit formellement de deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$. La somme des deux résultats définit donc une variable aléatoire Σ à valeurs dans $\{2, 3, \ldots, 12\}$ et l'on cherche à savoir s'il est possible que sa loi soit uniforme, c'est-à-dire que

$$\forall i \in \{2, \ldots, 12\}, P(\Sigma = i) = \frac{1}{11}.$$

Pour attaquer le problème efficacement, il est utile de disposer d'une manière efficace de calculer la loi de Σ à partir de X et Y. La plus efficace de toutes est de considérer la *fonction génératrice* de chacune des variables, c'est-à-dire

$$f_X(z) = \sum_{i=1}^{6} P(X = i)\, z^i \qquad \text{et} \qquad f_Y(z) = \sum_{i=1}^{6} P(Y = i)\, z^i.$$

Il s'agit de deux polynômes de degré 6 (sans terme constant).

De même, la fonction génératrice de Σ est le polynôme

$$f_\Sigma(z) = \sum_{i=2}^{12} P(\Sigma = i)\, z^i.$$

Le fait que $\Sigma = X + Y$ se traduit alors par la relation

$$f_\Sigma(z) = f_X(z)\, f_Y(z)$$

entre les fonctions génératrices.

En effet,

$$\begin{aligned}
f_X(z)\,f_Y(z) &= \left(\sum_{i=1}^{6} P(X=i)\,z^i\right)\left(\sum_{j=1}^{6} P(Y=j)\,z^j\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{6} P(X=i)\,P(Y=j)\,z^{i+j}\\
&= \sum_{k=2}^{12}\left(\sum_{i+j=k} P(X=i)\,P(Y=j)\right)z^k\\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{k=2}^{12}\left(\sum_{i+j=k} P(X=i, Y=j)\right)z^k\\
&= \sum_{k=2}^{12} P(\Sigma=k)\,z^k\\
&= f_\Sigma(z),
\end{aligned}$$

le signe $\overset{\perp\!\!\!\perp}{=}$ indiquant que l'on a utilisé une hypothèse inhérente à la modélisation du lancer de deux dés différents, à savoir que les deux résultats X et Y sont indépendants. (Il est bien sûr tout à fait possible de construire deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 6\}$ dont la somme suive une loi uniforme : on peut commencer par prendre une variable aléatoire uniforme U à valeurs dans $\{2, 3, \dots, 11\}$ puis poser par exemple $X = \max(6, U-1)$ et $Y = U-X$. Il est juste difficile d'admettre une telle solution, avec X et Y non indépendantes, comme une modélisation raisonnable de deux dés.)

Ainsi, si nos deux dés existaient, on aurait en particulier une factorisation de

$$f_\Sigma(z) = z^2 + z^3 + \cdots + z^{11} + z^{12} = z^2\left(1 + z + \cdots + z^9 + z^{10}\right)$$

en produit de deux polynômes $zP(z)$ et $zQ(z)$, où P et Q sont deux polynômes de degré ≤ 5 dont les coefficients appartiennent à $[0, 1]$ (ce qui est une manière de traduire le fait que $f_X(z)$ n'a pas de terme constant. En particulier, cela donnerait une factorisation

$$P(z)\,Q(z) = 1 + z + \cdots + z^9 + z^{10} =: R(z).$$

Notons que cette factorisation montre en particulier que P et Q sont bien de degré 5 (et pas seulement ≤ 5) et qu'en outre ils ne s'annulent pas en 0.

On peut alors conclure : un polynôme réel de degré 5 de coefficient dominant positif tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc trouver un réel z_0 tel que $P(z_0) = 0$. D'après ce qui précède, on sait même que $z_0 \neq 0$.

Cela entraîne alors que z_0 est une racine de

$$f_\Sigma = z^2\left(1 + z + \cdots + z^9 + z^{10}\right)$$

Comme $z_0 \neq 0$, cela entraîne même que z_0 est une racine de

$$R = 1 + z + \cdots + z^9 + z^{10}.$$

Il suffit donc de démontrer que ce polynôme n'a pas de racine réelle !

Pour cela, remarquons que le polynôme produit

$$(z-1)R = X^{11} - 1$$

a pour racines les racines onzièmes de l'unité. Comme 1 est la seule racine réelle onzième de l'unité et que l'on vérifie directement que $R(1) = 11 \neq 0$, on a bien que R n'a pas de racine réelle

On a donc abouti à une contradiction, ce qui montre que la construction demandée par la question est impossible.